MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

35. BAND 5. (SCHLUSS-) HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 15. JULI 1932)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1932

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 56,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

35. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Nikliborc, W., Eine Bemerkung über die Volumpotentiale 625
Hölder, E., Über eine potentialtheoretische Eigenschaft der Ellipse 632
Whitehead, J. H. C., Affine spaces of paths which are symmetric about each point 644
Haack, W., Zylindrische Strahlensysteme 660
Garten, V., Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Rochesche Satelliten und ringförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Zentralkörper 684
Meyer, W. F., Über eine independente Darstellung der Singularitätenanzahlen einer ebenen algebraischen Kurve 746
Cartan, H., Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné 760
Walfisz, A., Über einige trigonometrische Summen. Zweite Abhandlung . . . 774

Eine Bemerkung über die Volumpotentiale.

Von

Władysław Nikliborc in Lwów, z. Z. in Leipzig *).

1. Das Newtonsche Potential des homogenen Ellipsoidkörpers

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1 \tag{1}$$

drückt sich bekanntlich in seinem Innern und auf dem Rande durch die Formel

$$V(x,y,z)=D-Ax^2-By^2-Cz^2 \tag{2}$$

aus. Hierbei sind A, B, C, D positive Konstanten, welche (falls die Dichte gleich 1 gesetzt wird) die Gleichung

$$A+B+C=2\pi$$

befriedigen. Entsprechendes gilt natürlich in der Ebene für das logarithmische Potential eines homogenen elliptischen Bereiches.

Herr E. Hölder hat die Vermutung ausgesprochen, daß auch die Umkehrung dieses Satzes richtig ist, d. h. *daß die Ellipsoidkörper* (1) *die einzigen Körper sind, deren Potential im Innern durch die Formel* (2) *geliefert wird.*

Herr E. Hölder bewies, daß *im Falle des zweidimensionalen Problems* diese Vermutung stets dann richtig ist, *wenn der Körper in einer gewissen Nachbarschaft zweiter Ordnung eines Kreisbereiches liegt.* Der Beweis des Herrn E. Hölder ist selbst in dieser nicht ganz allgemeinen Fassung nicht ohne weiteres auf den Raum übertragbar, da er sich auf die Theorie der konformen Abbildung stützt.

In dieser Arbeit wird die Vermutung des Herrn E. Hölder sowohl in der Ebene als auch im Raume vollständig bewiesen. Da der Beweis im Raume ein wenig schwieriger ist als in der Ebene, so werden wir ihn für das *dreidimensionale* Problem durchführen.

*) International Education Board Fellow (Rockefeller Foundation).

2. Die in der Formel (2) vorkommenden Konstanten A, B, C, D drücken sich bekanntlich durch die Formeln

$$(3)\quad \begin{aligned} A &= \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad B = \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \\ C &= \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad D = \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \end{aligned}$$

mit

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$$

aus. Es ist offenbar für $k > 0$

$$A(ka, kb, kc) = A(a, b, c), \quad B(ka, kb, kc) = B(a, b, c),$$
$$C(ka, kb, kc) = C(a, b, c),$$

d. h. die Konstanten A, B, C hängen nur von den Verhältnissen der Größen a, b, c ab.

Wir wollen zunächst einen für das Folgende nötigen (und im Falle des zweidimensionalen Problems trivialen) Hilfssatz beweisen.

Ist $A > 0, B > 0, C > 0$ und

$$(4)\qquad A + B + C = 2\pi,$$

so haben die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{aligned} A &= \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \\ B &= \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \\ C &= \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} \end{aligned}$$

gewiß eine Lösung mit

$$a > 0, \ b > 0, \ c > 0.$$

Beweis. Setzt man in der ersten Formel (5)

$$\lambda = a^2 t,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} A &= \pi bc \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+t)(b^2+a^2t)(c^2+a^2t)}} \\ &= \pi c \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+t)\left(1+\frac{a^2}{b^2}t\right)(c^2+a^2t)}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt offenbar

$$\frac{\partial A}{\partial a} < 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial b} > 0. \tag{6}$$

Entsprechend gilt natürlich

$$\frac{\partial B}{\partial a} > 0, \quad \frac{\partial B}{\partial b} < 0; \qquad \frac{\partial C}{\partial a} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial b} > 0. \tag{7}$$

Augenscheinlich ist darum

$$\frac{\partial (A, C)}{\partial (a, b)} < 0, \quad \frac{\partial (B, C)}{\partial (a, b)} > 0 \tag{8}$$

für alle $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Wir bemerken nun, daß die Funktionen A, B, C die Gleichung (4) identisch erfüllen, so daß eine der Gleichungen (5) stets eine Folge der beiden anderen und der Gleichung (4) ist. Der Homogenitätseigenschaft der Funktionen A, B, C wegen kann man stets $c = 1$ setzen, so daß wir es eigentlich mit einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu tun haben.

Wir betrachten jetzt den Raum der A, B, C-Variablen und die Ebene (4), und zwar denjenigen Teil derselben, für den

$$A > 0, \; B > 0, \; C > 0 \tag{9}$$

gilt.

Wir behaupten nun zunächst folgendes: Es sei (A_ν, B_ν, C_ν) eine konvergente Folge von Punkten, die in der Ebene (4) liegen und den Ungleichheiten (9) genügen. Es sei weiter

$$A_0 = \lim A_\nu \neq 0, \qquad B_0 = \lim B_\nu \neq 0, \qquad C_0 = \lim C_\nu \neq 0.$$

Haben dann die Gleichungen (5) eine Lösung für jedes (A_ν, B_ν, C_ν), so gilt das gleiche für (A_0, B_0, C_0).

In der Tat, es sei (a_ν, b_ν, c_ν) eine zu (A_ν, B_ν, C_ν) gehörige Lösung mit $a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$, $c_\nu > 0$, die wir uns durch die Gleichung

$$a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 = 1$$

normiert denken. Man kann aus der Folge der Zahlentripel (a_ν, b_ν, c_ν) eine Teilfolge aussondern, die gegen einen Grenzwert (a_0, b_0, c_0) konvergiert. Es ist gewiß $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$ (man beweist nämlich leicht, daß z. B. $\lim\limits_{a \to 0} A = 2\pi$ ist, woraus wegen (4) $B_0 = C_0 = 0$ folgen müßte). Die Funktionen A, B, C sind aber in (a_0, b_0, c_0) stetig, so daß die Zahlen a_0, b_0, c_0 tatsächlich eine dem Punkte (A_0, B_0, C_0) entsprechende Lösung, bilden.

Wir betrachten jetzt den Punkt

$$A_0 = B_0 = C_0 = \frac{2\pi}{3}.$$

Für dieses Wertetripel haben unsere Gleichungen gewiß mindestens eine Lösung; es genügt ja, das Potential einer Kugel zu berechnen. Die Koeffizienten von x^2, y^2, z^2 sind dann eben gleich $\frac{2\pi}{3}$ und natürlich durch die Formeln (5) gegeben.

Wegen (8) kann man in der Ebene (4) um den Punkt (A_0, B_0, C_0) einen hinreichend kleinen Kreis legen, so daß die Gleichungen (5) für jeden Punkt dieses Kreises lösbar sind. Wir führen jetzt durch (A_0, B_0, C_0) in der Ebene (4) irgendeine Halbgerade, betrachten diejenigen ihrer Punkte, welche den Ungleichheiten (9) genügen, und teilen sie in zwei Klassen folgenderweise ein: Der Punkt (A, B, C) soll zur ersten Klasse dann und nur dann gehören, wenn die Gleichungen (5) für alle „zwischen" diesem Punkte und (A_0, B_0, C_0) liegenden Punkte lösbar ist. Alle anderen Punkte sollen der zweiten Klasse angehören. An sich sind zwei Fälle möglich: Erstens alle Punkte unserer Strecke gehören der ersten Klasse an, woraus folgt, daß die Gleichungen (5) für alle betrachteten Punkte eine Lösung haben; zweitens, die zweite Klasse ist nicht leer. In diesem Falle definiert unsere Einteilung der Punkte einen Dedekindschen Schnitt. Es sei (A^*, B^*, C^*) der durch diesen Schnitt bestimmte Punkt. Er muß nach dem früher Festgesetzten der ersten Klasse angehören, da er als Häufungspunkt der Punkte, für welche die Gleichungen (5) eine Lösung besitzen, aufgefaßt werden kann. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Wegen (8) kann man nämlich im Punkte (A^*, B^*, C^*) den Hauptsatz über implizite Funktionen anwenden, woraus dann folgt, daß (A^*, B^*, C^*) unmöglich durch unseren Schnitt erzeugt sein kann. Deshalb ist die zweite Möglichkeit ausgeschlossen, unsere Gleichungen sind daher für alle Punkte der betrachteten Strecke lösbar. Hieraus folgt aber die Richtigkeit unserer Behauptung.

Daß die Lösung der Gleichungen (5) bis auf einen positiven Proportionalitätsfaktor eindeutig ist, wird sich aus den weiter unten folgenden Überlegungen ergeben.

3. Es sei jetzt T irgendein beschränktes Gebiet, dessen Rand S, der aus einer endlichen Anzahl Komponenten bestehen kann, in jedem Punkte eine Normale besitzt. Das Potential $V(x, y, z)$ von T sei durch die Formel (2) im Innern von T ausgedrückt. Da

$$\Delta V = -4\pi$$

gilt, so folgt hieraus

$$A + B + C = 2\pi.$$

Wir wollen jetzt beweisen, daß

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0$$

gilt[1]). Und zwar wollen wir zunächst zeigen, daß keine der Zahlen A, B, C verschwinden kann. Wäre nämlich z. B. $C = 0$, so wäre in $T + S$

$$\frac{\partial V}{\partial z} \equiv 0,$$

da die partiellen Ableitungen erster Ordnung überall stetig sind. Nimmt man aber denjenigen Punkt auf S an, in welchem man eine zur Ebene $z = 0$ parallele Stützebene des Körpers legen kann, so sieht man sofort, daß dort $\frac{\partial V}{\partial z} \neq 0$ ist, da der ganze Körper ganz auf einer und derselben Seite dieser Ebene liegt. Demnach ist gewiß

$$A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0. \tag{10}$$

Um jetzt zu beweisen, daß keine der Zahlen A, B, C negativ sein kann, bemerken wir zunächst, daß $V(x, y, z)$ eine in dem Gesamtraume nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion ist. Da sie nun im Unendlichen verschwindet und überdies überall positiv ist, so muß sie auch ein positives, absolutes Maximum haben. Es sei $P(x_0, y_0, z_0)$ derjenige Punkt, in welchem dieses eintritt. Da die Funktion $V(x, y, z)$ im Außengebiete von $T + S$ eine reguläre Potentialfunktion ist, so kann P gewiß nicht in dem Außenraume liegen, gehört also $T + S$ an, und das Potential V ist in P gewiß durch die Formel (2) gegeben. Da die partiellen Ableitungen erster Ordnung von V überall existieren und stetig sind, so gilt in P

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

also

$$A x_0 = 0, \quad B y_0 = 0, \quad C z_0 = 0.$$

(Dies gilt wegen der Stetigkeit von V_x, V_y, V_z auch dann, wenn P auf S liegt.) Wegen (10) folgt hieraus

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Der Koordinatenursprung liegt also in $T + S$. Liegt nun $P(0, 0, 0)$ in T, so ist dort

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \leqq 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \leqq 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \leqq 0,$$

---

[1]) Wir wollten dies nicht zu den Voraussetzungen hinzufügen. Will man von vornherein $A > 0, B > 0, C > 0$ annehmen, so braucht man über S keinerlei Regularitätsannahmen zu machen. Die Voraussetzung, daß der von der Masse besetzte Raumteil aus *einem* Gebiet besteht und daß S eine Normale besitzt, ist nur zum Beweise von $A > 0, B > 0, C > 0$ erforderlich. Im Falle des zweidimensionalen Problems ist auch das letztere nicht nötig. (Übrigens auch im Falle des dreidimensionalen Problems kann man leicht die Voraussetzungen über S verallgemeinern.)

also wegen (2) und (10)

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0.$$

Liegt aber P auf S, so betrachte man den durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

erklärten Kegel. Nimmt man an, daß mindestens eine der Zahlen A, B, C negativ ist (alle drei können es wegen (4) nicht sein), so ist dieser Kegel reell, und teilt den ganzen Raum in Gebiete, die entsprechend durch

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 > 0 \tag{11}$$

und

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 < 0$$

erklärt sind. Da $V(x, y, z)$ in P das Maximum annimmt, so muß T ganz in dem durch (11) erklärten Gebiete liegen (von den Randpunkten abgesehen). Wir nehmen jetzt irgendeine Richtung l, welche von P in denjenigen Teil von (11) führt, in welchem T liegt. Es ist gewiß

$$\frac{\partial V}{\partial l} > 0$$

(da sämtliche Volumenelemente von T in derselben Richtung anziehen), woraus die Unmöglichkeit von $V_x = V_y = V_z = 0$ in diesem Punkte folgt, $V(x, y, z)$ könnte also in P nicht das Maximum annehmen. Demnach muß P in Wirklichkeit im Innern von T liegen, woraus endgültig $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ folgt[1]).

4. Es sei jetzt (a, b, c) irgendeine Lösung der Gleichungen (5). Wir betrachten die Schar der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} + \frac{z^2}{k^2 c^2} = 1$$

erklärten Ellipsoidkörper $\mathfrak{E}$. Das Newtonsche Potential eines jeden solchen Körpers ist durch die Formel

$$V_k(x, y, z) = D(k) - Ax^2 - By^2 - Cz^2$$

im Innern desselben geliefert. Die Größen A, B, C sind, wie schon bemerkt, von k unabhängig. Unter diesen Ellipsoidkörpern wählen wir den kleinsten $\mathfrak{E}^*$, der $T + S$ enthält. Der Rand S^* von $\mathfrak{E}^*$ und der Rand S von T haben mindestens einen Punkt Q gemeinsam. Es sei (n_0) die in das Innere von $\mathfrak{E}^*$ in Q gerichtete Normale von S^* und S.

Wir bezeichnen jetzt mit T' denjenigen Teil von $\mathfrak{E}^*$, welcher außerhalb von $T + S$ liegt. Es seien V^*, V' die von $\mathfrak{E}^*$ und T' herrührenden Potentiale. Offenbar gilt

$$V^* = D(k^*) - Ax^2 - By^2 - Cz^2,$$
$$V^* = V + V',$$

also wegen (2)

$$V' = D(k^*) - D = \text{konst.} \tag{12}$$

in $T + S$. Ich behaupte jetzt, daß das Lebesguesche Volumenmaß von T' notwendig gleich Null ist. Andernfalls wäre nämlich in Q gewiß

$$\frac{\partial V'}{\partial n_0} > 0,$$

da T' ganz auf derselben Seite der zu $\mathfrak{E}^*$ in Q gehörenden Tangentialebene liegt. Dies ist offenbar wegen (12) in $T + S$ und wegen der Stetigkeit der Funktionen V'_x, V'_y, V'_z in dem Gesamtraume unmöglich. Demnach muß T' vom Maße Null sein, also $\mathfrak{E}^*$ mit $T + S$ zusammenfallen, und damit ist der Satz des Herrn E. Hölder vollständig bewiesen.

Man beachte noch, daß durch die vorstehenden Betrachtungen auch die Unität (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) der Lösung von (5) erbracht ist. Zwei Ellipsoide mit dem gleichen Potential im Innern müssen identisch sein.

Leipzig, 7. Dezember 1930.

(Eingegangen am 8. Dezember 1930.)

Zusatz während der Korrektur. In den Comptes rendus **192** (1931), S. 1443—1446 erschien eine Note von Herrn Pierre Dive, Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes, in welcher unser Hilfssatz bewiesen wird. Der Beweis ist von meinem ganz verschieden. Der Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung wird von Herrn Dive in einer darauf folgenden Note, Sur une propriété exclusive des homoïdes ellipsoïdaux, Comptes rendus **193** (1931), S. 141—142, behandelt.

Leipzig, den 3. März 1932.

Über eine potentialtheoretische Eigenschaft der Ellipse.

Von

Ernst Hölder in Leipzig.

Bekanntlich ist das Newtonsche Potential eines homogenen Ellipsoides im Innern des Ellipsoides eine quadratische Funktion der kartesischen Koordinaten. Von Interesse ist auch folgende Umkehrung: Man weiß, das Newtonsche Potential eines homogenen Körpers T ist im Innern von T eine quadratische Funktion der Koordinaten; welche Gestalt besitzt dann T? Gilt insbesondere der Unitätssatz, daß dann T notwendig ein Ellipsoid ist, so daß dieses durch die genannte potentialtheoretische Eigenschaft gekennzeichnet wäre? Daß diese Vermutung zutrifft, ist kürzlich von Herrn W. Nikliborc bewiesen worden*). Ich selbst habe ursprünglich statt des räumlichen das entsprechende ebene, auf die Ellipsen bezügliche Problem behandelt und zwar mit Methoden, die sich wesentlich auf die Möglichkeit der konformen Abbildung in der Ebene stützen; so wird der Unitätssatz freilich nur für „kreisähnliche" Bereiche gewonnen, genauer für stetig gekrümmte Bereiche, die in genügend enger Nachbarschaft eines Kreises liegen.

Da die sich so ergebende neue Formulierung des Problems zu einem vielleicht willkommenen Beispiel einer nichtlinearen Randwertaufgabe der Potentialtheorie führt, sei es mir gestattet, auf die Frage nochmals zurückzukommen.

Der Gang unserer Betrachtung ist im einzelnen folgender: Zunächst werden die in Frage stehenden (beschränkten, einfach zusammenhängenden) ebenen Gebiete T, die, mit konstanter Flächendichte belegt, im Innern als logarithmisches Potential eine quadratische Funktion der Koordinaten (wir können annehmen: ohne lineare Glieder) besitzen, dahin charakterisiert, daß die natürliche Belegungsdichte m der (als stetig gekrümmt vorausgesetzten) Begrenzung S von T proportional zur Stützfunktion von S sein muß. Die Dichte m leitet sich aus dem Leiterpotential von S ab, dessen im Unendlichen regulärer Teil, durch konforme Abbildung des Außengebietes T_a von T auf das Innere Θ des Einheitskreises Σ verpflanzt, dort eine reguläre Potentialfunktion ergibt, die auf Σ einer gewissen nichtlinearen Randbedingung genügt. Dies Randwertproblem für den Kreis ist

*) Vgl. die unmittelbar vorangehende Abhandlung.

deshalb auch an sich von Interesse, weil es den Verzweigungsfall darbietet, der bei diesen erst neuerdings behandelten Aufgaben[1]) noch nicht näher untersucht ist. Mit Hilfe der Dinischen Auflösungsformel der zweiten Randwertaufgabe für den Kreis erhält man aus dem nichtlinearen Randwertproblem eine nichtlineare Integralgleichung, deren absolut genügend kleinen Lösungen nach den bekannten Methoden der sukzessiven Approximationen bestimmt werden können und Aufschluß über die Mannigfaltigkeit der „kreisähnlichen" Bereiche geben, die unsere eingangs formulierte potentialtheoretische Eigenschaft besitzen; es zeigt sich: es sind nur die Ellipsen.

§ 1.

Formulierung der Aufgabe mit Hilfe der Stützfunktion.

In der Ebene der rechtwinkligen Koordinaten x, y sei ein beschränktes Gebiet T gegeben, das von einer geschlossenen, doppelpunktlosen, stetig gekrümmten Kurve S begrenzt ist.

T sei mit der Flächendichte 1 belegt. Wir betrachten sein logarithmisches Potential

$$V(x,y)=\int_T \log\frac{1}{r}\cdot dx'dy' \qquad (r^2=(x-x')^2+(y-y')^2). \tag{1}$$

Wenn wir unter S_t die Kurve verstehen, die aus S durch Ähnlichkeitstransformation bezüglich des Punktes (x, y) im Verhältnis $t:1$ $(0\leqq t\leqq 1)$ hervorgeht, und alle auf S_t bezüglichen Größen mit dem Index t versehen, so wird

$$V(x,y)=\int_0^1 dt\int_{S_t} p'\log\frac{1}{r_t}\cdot ds_t' \qquad (ds_t'=t\cdot ds',\ r_t=t\cdot r);$$

ds' ist das Bogenelement auf S in (X', Y') und (a', b') der Einheitsvektor der Außennormale n' zu S in (X', Y'); $p'=p(s')=(X'-x)a'+(Y'-y)b'$ die Stützfunktion von S in (X', Y') bezüglich des Aufpunktes (x, y), endlich sinngemäß $r^2=(x-X')^2+(y-Y')^2$. Wenn wir das Integral ausrechnen, kommt

$$V=\int_0^1 t\,dt\int_S p'\left(\log\frac{1}{r}-\log t\right)ds'=\frac{1}{2}\int_S p'\log\frac{1}{r}\cdot ds'+\frac{1}{4}\int_S p'ds',$$

somit wegen

$$\frac{1}{2}\int_S p'ds'=\mathsf{T} \qquad (\mathsf{T}=\text{Flächeninhalt von } T)$$

[1]) T. Carleman, Über eine nichtlineare Randwertaufgabe bei der Gleichung $\Delta u=0$, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 35–44. Vgl. die Monographie von L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin 1931, insbes. S. 47–62.

die Formel[2])

$$2V(x,y) = \int_S p' \log \frac{1}{r} \cdot ds' + \mathsf{T}. \tag{2}$$

Nennen wir p_0 die Stützfunktion von S, wenn der Koordinatenursprung als Bezugspunkt gewählt ist. Dann wird

$$p' = p_0' - x\,a' - y\,b'.$$

Dies in (2) eingesetzt, gibt

$$2V = \mathsf{T} + \int_S p_0' \log \frac{1}{r} \cdot ds' - x \int_S a' \log \frac{1}{r} \cdot ds' - y \int_S b' \log \frac{1}{r} \cdot ds'. \tag{3}$$

Nun ist, wie man leicht bestätigt, zum Beispiel

$$\int_S a' \log \frac{1}{r} \cdot ds' = \int_T \frac{\partial}{\partial x'} \log \frac{1}{r} \cdot dx'\,dy' = -\frac{\partial}{\partial x} \int_T \log \frac{1}{r} \cdot dx'\,dy' = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

so daß wir (3) auch in der Form[3])

$$2V = \mathsf{T} + \int_S p_0' \log \frac{1}{r} \cdot ds' + x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} \tag{3a}$$

schreiben können.

Daraus sehen wir zunächst:

Dann und nur dann ist $V(x, y)$ in $T + S$ eine quadratische Funktion der Koordinaten, also (im geeignet gewählten kartesischen Achsenkreuz[4])) von der Gestalt

$$V(x, y) = A x^2 + B y^2 + V^0 \qquad (V^0 = V(0,0)), \tag{4}$$

wenn in $T + S$

$$\int_S p_0' \log \frac{1}{r} \cdot ds' = -C \qquad (C \text{ konstant}) \tag{5}$$

ist. Es gilt $-C = 2V^0 - \mathsf{T}$.

Eines Beweises bedarf nur der Schluß von (5) auf (4). Aus (5) folgt vermöge (3a)

$$2\left(V - \frac{\mathsf{T} - C}{2}\right) = x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Also ist $V(x, y) - \frac{\mathsf{T} - C}{2}$ eine homogene Funktion zweiter Dimension in x, y. Ihre Ableitungen $V_x(x, y)$, $V_y(x, y)$ sind homogene Funktionen erster

---

[2]) Sie ist das zweidimensionale Analogon der bekannten Gaußschen Formel für das Newtonsche Potential eines homogenen Körpers.

[3]) Für das Newtonsche Potential bei Liouville, Journ. de Math. **11** (1846), S. 234.

[4]) Dessen Ursprung ist dann der Bezugspunkt der Stützfunktion p_0 in (5).

Dimension in x, y, überdies sind sie in T reguläre Potentialfunktionen. Daraus kann man schließen, daß V_x, V_y Linearformen in den Koordinaten sind und V selbst bei geeigneter Verfügung über die Achsenrichtungen die Gestalt (4) besitzt.

Die Bedingung (5) besagt nun folgendes: Für den Bereich $T+S$ ist das mit der einfachen Belegung

$$m = \frac{1}{2\mathsf{T}} p_0 \tag{5a}$$

gebildete Potential

$$\Gamma(x, y) = \int_S \log \frac{1}{r} \cdot m' \, ds' \tag{6}$$

am Rande S konstant $\left(= -c = -\frac{C}{2\mathsf{T}}\right)$ und hat die Masse 1, ist also[5]) das *Leiterpotential* von $T+S$; m ist die *natürliche Belegung* von S, die also unter der Bedingung (5) der Stützfunktion p_0 von S proportional ist; das ist jetzt der Inhalt der Formel (5a).

Mit Rücksicht auf unser späteres Ziel, die Ellipse potentialtheoretisch zu charakterisieren, bemerken wir schon hier:

Die Stützfunktion p_0 ist jedenfalls dann der natürlichen Belegung m proportional, wenn S eine Ellipse mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung (dem Bezugspunkt von p_0) ist.

Zum Beweise[6]) benutzt man den Satz: Zwei konzentrische, ähnliche und ähnlich gelegene („homothetische") Ellipsen schneiden aus jeder Transversalen zwei gleich lange Strecken heraus. Daraus folgt durch eine einfache geometrische Betrachtung: Für eine bezüglich ihres Mittelpunktes homothetisch, d. h. mit der Stützfunktion belegte Ellipse S ist das logarithmische Potential im Innern T konstant, es gilt also (5).

Man setze jetzt im Außenbereich $T_a + S$ von T

$$\Gamma(x, y) \equiv \int_S \log \frac{1}{r} \cdot m' \, ds' = -c + H(x, y). \tag{7}$$

Dann ist die natürliche Belegungsdichte m durch die Normalableitung des Leiterpotentials H gegeben:

$$m = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial H}{\partial n} \quad \text{auf } S. \tag{8}$$

Da bekanntlich für stetig gekrümmte Bereiche $m > 0$ ist, so folgt aus (5a), daß bei unserer Wahl des Koordinatensystems der Ursprung in T liegt;

---

[5]) Vgl. J. Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911, S. 56.

[6]) Vgl. Meutzner, Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentials, Math. Annalen 8 (1875), S. 319–358, insbesondere S. 332 f.; auch J. Plemelj, loc. cit.[5]), S. 71 f.

S ist in bezug auf ihn sternförmig. Es ist

$$H = -U_0 + h, \quad U_0 = \log R, \quad R^2 = x^2 + y^2; \tag{9}$$

$h(x, y)$ ist in $T_a + S$ stetig, in T_a reguläre Potentialfunktion, beide Male inklusive des unendlich fernen Punktes; $H = 0$ auf S. Das Leiterpotential H hat also die Masse 1. Wegen (7) geht[7])

$$h(x, y) \to c \quad \text{für} \quad R \to \infty. \tag{10}$$

Für später merken wir noch an: Es gilt (unabhängig von (5a))

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} = p_0 e^{-2U_0} \quad \text{auf } S. \tag{11}$$

§ 2.

Konforme Abbildung. Das nichtlineare Randwertproblem.

Alle bisher angestellten Betrachtungen lassen sich sinngemäß auch auf den dreidimensionalen Raum übertragen. Zum Beweis der Umkehrung der oben (S. 635) erwähnten potentialtheoretischen Eigenschaft der Ellipse, daß also — wenigstens bei Beschränkung auf „kreisähnliche" Bereiche — auch nur im Falle der Ellipse die homothetische Belegung durch die Stützfunktion (bezüglich eines passend gewählten festen Aufpunktes) zugleich eine natürliche Belegung sein kann, benutzen wir wesentlich die Möglichkeit der konformen Abbildung in der Ebene.

Sei $K(x, y)$ die (bis auf eine Konstante bestimmte) zu H konjugierte Potentialfunktion in $T_a + S$. Dann wird die konforme Abbildung des Außengebietes[8]) T_a von T in der $z = x + iy$-Ebene auf das Außengebiet Θ_a des Einheitskreises Θ in der $\zeta = \xi + i\eta$-Ebene vermittelt durch

$$\zeta = \zeta(z) = e^{-(H + iK)}. \tag{12}$$

Dabei entsprechen sich $z = \infty$ und $\zeta = \infty$. Die Ableitung $\frac{d\zeta(z)}{dz}$ ist auch noch auf S stetig und von Null verschieden.

Die Werte des Leiterpotentials H, ebenso wie die der Potentialfunktionen U_0 und h sollen nun einfach durch die konforme Abbildung in die ζ-Ebene übertragen werden. Wir bekommen so in $\Theta_a + \Sigma$ die Funktionen $\mathsf{H}(\xi, \eta) = H(x, y)$, $\mathsf{U}(\xi, \eta) = U_0(x, y)$, $\mathsf{h}(\xi, \eta) = h(x, y)$; $\mathsf{H}(\xi, \eta)$ ist das zum konstanten Randwert 0 und (wegen der Invarianz der Kapazität, vgl. (14)) zur Masse 1 gehörige Leiterpotential von Σ, also

$$\mathsf{H}(\xi, \eta) = \log \frac{1}{\mathsf{P}}, \quad \zeta = \mathsf{P} e^{i\sigma}, \quad 0 \leqq \sigma \leqq 2\pi, \quad 1 \leqq \mathsf{P}. \tag{13}$$

[7]) Vgl. J. Plemelj, loc. cit. [5]), S. 64f.

[8]) T_a und Θ_a enthalten je den unendlich fernen Punkt im Innern.

Sei v die Außennormale an Σ, also die Richtung der Radiusvektor P. Dann wird wegen (8)

$$m = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \mathsf{v}}\frac{d\mathsf{v}}{dn} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\zeta(z)}{dz}\right|. \tag{14}$$

Somit gibt (5a), (11) für U folgende Randbedingung auf Σ

$$\frac{\partial \mathsf{U}}{\partial \mathsf{v}} = \varkappa e^{-2\mathsf{U}}, \qquad \varkappa = \frac{\mathsf{T}}{\pi}. \tag{15}$$

Hier ist nach (9) in $\Theta_a + \Sigma$

$$\mathsf{U} = \log \mathsf{P} + \mathsf{h}; \tag{16}$$

$\mathsf{h}(\xi, \eta)$ ist in $\Theta_a + \Sigma$ stetig, in Θ_a reguläre Potentialfunktion, beidemal inklusive des Punktes $\zeta = \infty$, und besitzt auf Σ stetige Normalableitung.

Es empfiehlt sich, durch Inversion an Σ die Funktionen U und h auf das Innere des Einheitskreises zu überpflanzen. Bezeichnet man die so entstehenden Potentialfunktionen in Θ mit $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{h}$, ferner die Innennormale an Σ jetzt mit ν, so ist nach (16), (15) in $\Theta + \Sigma$

$$\mathfrak{U} = \log\frac{1}{\mathsf{P}} + \mathfrak{h}, \qquad \mathsf{P} = |\zeta|, \tag{17}$$

$\mathfrak{h}$ in $\Theta + \Sigma$ nebst seiner Normalableitung stetig, in Θ reguläre Potentialfunktion,

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \nu} = \varkappa e^{-2\mathfrak{U}} \text{ auf } \Sigma. \tag{18}$$

Wenn umgekehrt eine Lösung $\mathfrak{U}$ der Randwertaufgabe (17), (18) vorliegt, so bildet, nebenbei bemerkt, die mit Hilfe der zu $\mathfrak{U}$ in Θ konjugierten Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ hergestellte Abbildungsfunktion

$$z = f(\zeta) = e^{\mathfrak{U}+i\mathfrak{V}} \tag{19}$$

den Einheitskreis $\Theta + \Sigma$ schlicht und konform auf einen stetig gekrümmten Bereich $T_a + S$ ab, dessen Stützfunktion p_0 nach (11), (14) der Bedingung (5a) genügt, dessen Innengebiet T also auch den Flächeninhalt $\mathsf{T} = \pi\varkappa$ besitzt.

Benutzt wird im folgenden nur die ohne weiteres einzusehende Tatsache, daß bei gegebenem Bereich $T_a + S$ die zu (12) inverse Abbildungsfunktion durch (19) dargestellt ist.

Endlich nehmen wir noch, vgl. (17), (10),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} \mathfrak{U}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} \mathfrak{h}\, d\sigma = \mathfrak{h}(0,0) = c = \log\tau \tag{20}$$

und betrachten die Potentialfunktion

$$\mathfrak{U} - c = U = \log\frac{1}{\mathsf{P}} + u. \tag{21}$$

Dann tritt an Stelle von (18)

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \lambda e^{-2U}, \quad \lambda = \varkappa e^{-2c} = \frac{\mathsf{T}}{\pi r^2}; \quad \int_{\Sigma} U d\sigma = 0 \tag{22}$$

oder für die reguläre Potentialfunktion $u = \mathfrak{h} - c$ formuliert:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda e^{-2u} - 1; \quad \int_{\Sigma} u d\sigma = 0. \tag{23}$$

Vermöge des zweiten Bieberbachschen Flächensatzes[9]) ist stets

$$0 < \lambda \leqq 1; \tag{24}$$

dies ergibt sich in unserem Fall auch direkt, denn wegen $(23)_1$ ist

$$\frac{\lambda}{2\pi} \int_{\Sigma} e^{-2u} d\sigma = 1, \tag{23}_0$$

außerdem ist $e^{-2u} \geqq 1 - 2u$ und gilt $(23)_2$.

Wir setzen noch

$$\lambda = 1 - s, \quad 0 \leqq s < 1 \tag{24a}$$

und ordnen die Gleichung (23) folgendermaßen:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + 2u = \Phi(u); \quad \int_{\Sigma} u d\sigma = 0 \tag{23a}$$

mit

$$\Phi(u; s) = (e^{-2u} + 2u - 1) - s e^{-2u}. \tag{23b}$$

§ 3.

Die nichtlineare Integralgleichung.

Um die (nichtlineare) Randwertaufgabe (23) in eine (nichtlineare) Integralgleichung überzuführen, erinnern wir an folgende Formel von Dini[10]), welche die Auflösung der zweiten Randwertaufgabe für den Kreis enthält. Es sei $\chi(\sigma)$ eine auf der Einheitskreisperipherie Σ ($Z = e^{i\sigma}$, $0 \leqq \sigma \leqq 2\pi$) erklärte stetige Funktion von σ. Das Potential $\Pi(\xi, \eta)$ der einfachen Schicht mit der Belegung $-\frac{1}{\pi}\chi(\sigma)$ auf Σ

$$\Pi(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \log \frac{1}{\varrho_{\zeta Z'}} \cdot \chi(\sigma') d\sigma', \quad \varrho_{\zeta Z'} = |\zeta - Z'|, \tag{25}$$

---

[9]) Vgl. G. Faber, Über Potentialtheorie und konforme Abbildung. Münch. Ber. 1920, S. 49–64, insbes. S. 55.

[10]) Vgl. z. B. É. Goursat, Cours d'analyse mathématique, 3ième éd., 3, Paris 1923, p. 239f.

genügt als Funktion in $\Theta + \Sigma$ auf Σ der Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Pi(\sigma^+) = \chi(\sigma) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \chi(\sigma')\, d\sigma'. \tag{25a}$$

Für eine Lösung u unseres Randwertproblems (23) folgt hieraus das Bestehen der Beziehung

$$u(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_{\Sigma} \log \frac{1}{\varrho_{\zeta Z'}} \cdot e^{-2u'}\, d\sigma'. \tag{26}$$

Denn die Normalableitung des Ausdrucks rechts ist nach (25a), $(23)_0$ gleich $\lambda e^{-2u} - 1$.

Wir lassen jetzt $\zeta \to Z$ auf Σ gehen und schreiben die so entstehende Integralgleichung mit dem Kern $\log \frac{1}{\varrho}$, $\varrho = \varrho_{\sigma\sigma'} = \varrho_{Z Z'}$, entsprechend zu (23a) in der Gestalt

$$u - \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma} \log \frac{1}{\varrho} u'\, d\sigma' = -\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \log \frac{1}{\varrho} \cdot \Phi(u')\, d\sigma'. \tag{26a}$$

Die homogene lineare Integralgleichung

$$u - \frac{n}{\pi} \int_{\Sigma} \log \frac{1}{\varrho} \cdot u'\, d\sigma' = 0 \tag{27}$$

mit dem Eigenwertparameter n besitzt[11]), wie etwa aus (25), (25a) entnommen werden kann, als Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen

$$n = 1, 2, \ldots, \qquad u(\sigma) = \begin{cases} \cos n\sigma, \\ \sin n\sigma. \end{cases} \tag{28}$$

Die Nullösungen von (26a) sind also, dem Falle $n = 2$ entsprechend, normiert

$$u_1 = \frac{\cos 2\sigma}{\sqrt{\pi}}, \qquad u_2 = \frac{\sin 2\sigma}{\sqrt{\pi}}. \tag{29}$$

Durch die Schmidtsche[12]) Kernzerspaltung

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\varrho} = N + \frac{1}{2}(u_1 u_1' + u_2 u_2') = N(\sigma, \sigma') + \frac{1}{2\pi} \cos 2(\sigma - \sigma') \tag{30}$$

entsteht unter Einführung der Parameter

$$r_\alpha = \int_{\Sigma} u\, u_\alpha\, d\sigma \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{31}$$

---

[11]) Vgl. z. B. loc. cit. [10]), S. 238.

[12]) Für die Behandlung der nichtlinearen Integralgleichung (26a) vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, II. Abh., Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 167f.

die von Nullösungen befreite Integralgleichung

$$u - 2\int_{\Sigma} N u' \, d\sigma' = \sum_{\alpha=1}^{2} r_\alpha u_\alpha - \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma} \log\frac{1}{\varrho}\cdot \Phi(u')\, d\sigma'. \tag{26b}$$

Es ist

$$\int_{\Sigma} N u_\alpha \, d\sigma = 0, \qquad \alpha = 0, 1, 2, \qquad u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{32}$$

Es empfiehlt sich, hier auch auf der rechten Seite N statt $\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\varrho}$ einzuführen. Dabei ändert sich nichts, denn es sind die dann auftretenden Integralausdrücke

$$\Phi^{(\alpha)} \equiv \int_{\Sigma} \Phi(u)\, u_\alpha \, d\sigma = 0 \tag{33}$$

für $\alpha = 1, 2$, sofern die Potentialfunktion u der Randbedingung (23a) genügt. Wir haben nur für u und

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\xi^2 - \eta^2) \quad \text{bzw.} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2\xi\eta, \tag{29a}$$

d. h. die in Θ regulären Potentialfunktionen, die auf Σ in unsere bisher so bezeichneten $u_1(\sigma)$, $u_2(\sigma)$ stetig übergehen, die Greensche Formel

$$0 = \int_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\, u_\alpha - u\frac{\partial u_\alpha}{\partial \nu}\right) d\sigma = \int_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + 2u\right) u_\alpha \, d\sigma = \Phi^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

anzuschreiben.

Gleichung (26b) wird also

$$u - 2\int_{\Sigma} N u' \, d\sigma' = \sum_{\alpha=1}^{2} r_\alpha u_\alpha - \int_{\Sigma} N\Phi(u')\, d\sigma'. \tag{26c}$$

Mit Hilfe des zu $2N$ gehörigen lösenden Kernes $2L$ ergibt sich wegen

$$2\int_{\Sigma} L(\sigma, \sigma^*) N(\sigma^*, \sigma')\, d\sigma^* = L(\sigma, \sigma') - N(\sigma, \sigma') \tag{34}$$

und

$$\int_{\Sigma} L u_\alpha \, d\sigma = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2) \tag{35}$$

die Integralgleichung

$$u = \sum_{\alpha=1}^{2} r_\alpha u_\alpha - \int_{\Sigma} L\Phi(u')\, d\sigma'. \tag{36}$$

Bei einer Lösung u unseres nichtlinearen Randwertproblems (23) erhalten wir aus (33) für die Parameter r_α $(\alpha = 1, 2)$ die Ausdrücke

$$r_\alpha \equiv \int_{\Sigma} u\, u_\alpha \, d\sigma = -\frac{\lambda}{2}\int_{\Sigma} e^{-2u} u_\alpha \, d\sigma. \tag{37}$$

Daraus entnimmt man leicht Schranken für die Werte des Parameters r_1 bei den in Frage kommenden Funktionen u. Es ist

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\, r_1 &= -\frac{\lambda}{2}\int e^{-2u}\cos 2\sigma\, d\sigma \\ &= -\frac{\lambda}{2}\int e^{-2u}(1-2\sin^2\sigma)\, d\sigma = -\frac{\lambda}{2}\int e^{-2u}(2\cos^2\sigma - 1)\, d\sigma \\ &= -\pi + \lambda\int e^{-2u}\sin^2\sigma\, d\sigma = +\pi - \lambda\int e^{-2u}\cos^2\sigma\, d\sigma,\end{aligned}$$

wegen $(23)_0$. Es gilt also die Ungleichheit

$$-\sqrt{\pi} < r_1 < +\sqrt{\pi}. \tag{38}$$

Wie wir noch sehen werden (vgl. (50)), liefern die Abbildungen des Einheitskreises auf das Äußere der Ellipsen Potentialfunktionen u, deren Parameterwerte r_1 gerade das Intervall $(-\sqrt{\pi}, +\sqrt{\pi})$ ausfüllen.

Weiter kann stets $r_2 = 0$ angenommen werden. Die Funktionswerte u können nämlich noch durch eine Drehung des Einheitskreises $\Theta + \Sigma$ in sich verpflanzt werden, d. h. die Funktion ist nur bis auf eine Transformation

$$\overline{u}(\mathsf{P}, \sigma) = u(\mathsf{P}, \sigma + \delta) \qquad (\delta \text{ konstant})$$

bestimmt. Wir können daher δ immer so wählen, daß

$$\overline{r}_2 = \int_{\Sigma} \overline{u}\, u_2\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\Sigma} u \sin 2(\sigma - \delta)\, d\sigma = 0 \tag{39}$$

ausfällt [13]).

Auf der anderen Seite ist aber in der bei der konformen Abbildung benötigten konjugierten Potentialfunktion $\mathfrak{V}$ noch eine willkürliche additive reelle Konstante enthalten, was einer Drehung des Bereiches $T_a + S$ um den Ursprung entspricht.

Endlich erreichen wir (vgl. (19), (21)) durch passende Verfügung über die Konstante c in $\mathfrak{U} = U + c$ den vorgegebenen Flächeninhalt $\mathsf{T} = \pi\varkappa = \pi\lambda e^{2c}$ von T.

§ 4.

Unität und Existenz.

Die zu hinreichend kleinen Beträgen der als Parameter aufzufassenden s, r_1 und $r_2 = 0$ gehörigen Lösungen der nichtlinearen Integralgleichung (36) bekommt man in bekannter Weise [14]) durch sukzessive Approximationen. Von besonderer Wichtigkeit für unsere Fragestellung ist der Unitätssatz, daß es zu einem bestimmten (absolut hinreichend kleinen) Wertepaar r_1, s nur *eine* Lösung u von (36) geben kann; diese läßt sich als Potenzreihe in r_1, s darstellen.

[13]) L. Lichtenstein, loc. cit. [12]), S. 170.

[14]) L. Lichtenstein, loc. cit. [12]), S. 168.

Jedenfalls gilt für die Lösung u von (36) wegen (35)

$$\int u\,d\sigma = 0\,; \qquad \int u\,u_\alpha\,d\sigma = r_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{40}$$

Ferner folgt aus dem Bestehen der Gleichung (36) wegen (34), (35) rückwärts (26c), sodann unter Berücksichtigung von (30), (40)

$$u(\sigma) - \frac{2}{\pi}\int_\Sigma \log\frac{1}{\varrho_{\sigma\sigma'}}\cdot u(\sigma')\,d\sigma' = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi^{(\alpha)}u_\alpha(\sigma) - \frac{1}{\pi}\int_\Sigma \log\frac{1}{\varrho_{\sigma\sigma'}}\cdot\Phi(u(\sigma')) \tag{41}$$

Erklärt man $u_\alpha(\xi, \eta)$ durch (29a), so ist durch die Formel

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi^{(\alpha)}u_\alpha(\xi,\eta) - \frac{\lambda}{\pi}\int_\Sigma \log\frac{1}{\varrho_{\xi Z'}}\,e^{-2u(\sigma')}\,d\sigma' \tag{42}$$

mit Rücksicht auf (41) die in Θ reguläre, in $\Theta + \Sigma$ stetige Potentialfunktion $u(\xi, \eta)$ dargestellt, welche auf Σ die Randwerte $u(\sigma)$ besitzt.

Wir berechnen nun von dieser Funktion $u(\xi, \eta)$ die Normalableitung am Rande Σ. Es ist nach (25a)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + 2u = \Phi(u) - \sum_{\alpha=0}^{2}\Phi^{(\alpha)}u_\alpha. \tag{43}$$

Die Randbedingung (23) ist also dann und nur dann erfüllt, wenn die Parameter r_1, s so bestimmt werden, daß sie den Verzweigungsgleichungen

$$\Phi^{(\alpha)} = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2) \tag{44}$$

genügen. Da $u(\sigma)$ stets als gerade Funktion herauskommt, ist $\Phi^{(2)} \equiv 0$. Aus

$$\Phi^{(0)} \equiv -\sqrt{2\pi s} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}r_1^2 + \ldots = 0 \tag{$44)_0$}$$

bestimmt sich der Parameter r_1 als Funktion von s:

$$r_1 = \sqrt{\pi s} + \ldots\,. \tag{45}$$

Wir erhalten also genau zwei nicht reguläre einparametrige lineare Reihen (*Arme*) von reellen Lösungen u von Gl. (36), $(44)_0$, die beide den (von vornherein nur in Betracht kommenden) Werten $s > 0$ entsprechen.

Nun liefern, wie wir im letzten Paragraphen sehen werden, die Ellipsen, die den Ursprung als Mittelpunkt und die Koordinatenachsen als Hauptachsen haben[14a]), gerade zwei nicht reguläre vom Parameter s abhängige lineare Reihen von Lösungen u von (23), also auch von (36), $(44)_0$. Die durch diese Ellipsen gelieferte Lösungsschar $u(s)$ (kurz die Schar der „normierten Ellipsen") muß für kleine Beträge des Parameters s mit unserer durch sukzessive Approximationen gewonnenen Lösungsschar von (36), $(44)_0$ identisch sein. Insbesondere genügt also letztere dem Randwertproblem (23), d. h. die noch übriggebliebene Verzweigungsgleichung $\Phi^{(1)} = 0$ ist identisch in s erfüllt.

[14a]) Dementsprechend ist $r_2 = 0$.

Wir haben somit das Ergebnis: Bei Beschränkung auf eine genügend enge Nachbarschaft des Kreises sind die Ellipsen die einzigen stetig gekrümmten Bereiche, die, mit konstanter Flächendichte belegt, ein logarithmisches Potential besitzen, das im Innern des Bereiches eine quadratische Funktion der kartesischen Koordinaten ist.

§ 5.

Die zu den Ellipsen gehörenden Lösungen.

Das Äußere einer Ellipse[15]) der z-Ebene, für welche die Koordinatenachsen Hauptachsen sind, ergibt sich aus dem Außenbereich $\Theta_a + \Sigma$ ($|\zeta| \geqq 1$) des ζ-Einheitskreises durch die Abbildungsfunktion

$$z = z(\zeta) = \tau\left(\zeta + \frac{\alpha}{\zeta}\right) \qquad (0 < \tau,\ -1 < \alpha < +1). \tag{46}$$

Die Parameterdarstellung der Ellipse ist

$$x = \tau(1+\alpha)\cos\sigma, \qquad y = \tau(1-\alpha)\sin\sigma;$$

ihr Flächeninhalt

$$\mathsf{T} = \pi\tau^2(1-\alpha^2), \quad \text{d. h.} \quad \lambda = 1-\alpha^2, \quad s = \alpha^2 \qquad (0 \leqq s < 1); \tag{47}$$

die Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{2|\sqrt{\alpha}|}{1+|\alpha|} = \frac{2|\sqrt[4]{s}|}{1+|\sqrt{s}|}$$

durchläuft daher das Intervall $\langle 0,1)$, wenn s das Intervall $\langle 0,1)$ durchläuft.

Als Funktion in $\Theta + \Sigma$ ($|\zeta| \leqq 1$) betrachtet ist

$$U = \log|z| - \log\tau = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\mathsf{P}^2} + 2\alpha\cos 2\sigma + \alpha^2\mathsf{P}^2\right), \tag{48}$$

$$u = \frac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\mathsf{P}^2\cos 2\sigma + \alpha^2\mathsf{P}^4). \tag{49}$$

Wir berechnen jetzt noch den Parameterwert r_1. Es ist nach (37)

$$r_1 = -\frac{\lambda}{2}\int_{\Sigma} e^{-2u}u_1\,d\sigma = -\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\sigma\cdot d\sigma}{1+2\alpha\cos 2\sigma+\alpha^2}.$$

Die Ausrechnung des Integrals, etwa als Residuensumme, ergibt

$$r_1 = \sqrt{\pi}\alpha = \sqrt{\pi s}, \qquad -\sqrt{\pi} < r_1 < +\sqrt{\pi}. \tag{50}$$

Dies muß die explizite Form von $(44)_0$ sein. Zu jedem nach $(44)_0$ möglichen Wertepaar s, r_1 gehört also eine (und nur eine normierte) Ellipse.

[15]) Vgl. auch J. Plemelj, loc. cit. [5]), S. 71ff.

Leipzig, den 23. April 1930.

(Eingegangen am 28. April 1930.)

Affine spaces of paths which are symmetric about each point.

By

J. H. C. Whitehead in Princeton, N. J. (U. S. A.).

1. Introductory. E. Cartan [1]) has shown that a necessary and sufficient conditions for the reflexion [2]) about any point in an affine space of paths to be an affine collineation, is that the covariant derivative of the curvature tensor shall vanish. We shall take the symmetry about each

[1]) Cartan, Journ. de Math. pures et appliquées **92** (1927), p. 1—119, see p. 80—90. This paper will be referred to as G. T. It is chiefly concerned with the geometrical theory of group manifolds developed by E. Cartan and J. A. Schouten (Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen **29** (1926), p. 803—815), and also studied independently by Schouten (Math. Annalen **102** (1929), S. 244—272). See also an earlier paper by L. P. Eisenhart, Proc. Nat. Acad. **11** (1925), p. 246—250. In the sections of G. T. to which we have referred, Cartan extends some of the methods he used in studying Riemannian spaces with the same property (Bull. Soc. Math. de France **54** (1926), p. 214—264 and **55** (1927), p. 114—134). A summary of his results is to be found in his mémorial: La Théorie des Groupes Finis et Continus et l'Analysis situs, Paris (1930). This mémorial will be referred to as C. G. The general class of Riemannian spaces which are characterized by the condition $R_{ijkl,m} = 0$ seems to have been first referred to by H. Levy in his thesis (Trans. American Math. Soc. **28** (1925), p. 690). In a paper which appeared shortly before Cartan's he attacked the problem of determining all such spaces (Rendic. Acad. Lincei (6) **3** (1926), p. 65—69 and 124—129). He used interesting methods but was led to a wrong result, through a faulty analysis of certain sub-groups of the orthogonal group. Cartan's paper appeared in the Bulletin shortly after this and contains a solution of the problem. Among the Riemannian spaces in question, are those in which there exists an absolute parallelism preserving lengths and angles, and having the geodesics as self-parallel curves. See Cartan and Schouten, Proc. Acad. v. W. te Amsterdam **292** (1926), p. 933—946; also Enea Bortolotti Atti, Veneto **84** (1925), p. 821—858 and **86** (1927), p. 455—465; also E. T. Whittaker, Journal of the London Math. Soc. **5** (1930), p. 68—80.

[2]) The reflexion about any point q is the transformation given by

$$y^i = -y^i$$

in normal coordinates at q.

point as the defining property, and shall refer to such a space as symmetric, thus following Cartan in the way he describes Riemannian spaces of this nature [3]).

Cartan also showed that any symmetric affine space is equivalent to a totally geodesic sub-space in the manifold of its group of automorphisms. The reflexion about any point O in A_n, followed by the reflexion about a neighboring point Q, is called by Cartan a *transvection* having the path OQ as its *base* (C. G. p. 47). Transvections are affine collineations, by the first of the two theorems referred to above, and the transvections having paths through O as their bases constitute a simply transitive set of collineations. This is a group only in the flat case when it is the group of translations. This set of transvections, together with the largest continuous group of collineations, h, which leave O invariant is the largest continuous group of collineations.

In this paper we give alternative proofs of the two theorems referred to above, in which we try to exhibit as clearly as possible the following analogies between symmetric affine spaces and flat affine spaces. Let H be any transformation belonging to h, and let T_A be the transvection which carries O into a point A and has the path OA as its base. As in the flat case it will be seen that

$$HT_A H^{-1} = T_B,$$

where

$$B = H(A).$$

The set of transvections is therefore invariant under the transformations of h (cf. C. G. § 57). Whereas the translations in a flat space constitute an Abelian sub-group, the transvections have an analogous property expressed by (8.6), which is briefly discussed in § 10. It is shown that if the commutator of two given transvections belongs to h, then the space is flat.

Whereas the translations in the manifold of the affine group constitute a flat affine space, the transvections in the manifold of the affine collineations in a symmetric space A_n, constitute a totally geodesic sub-space to which A_n is equivalent.

Except for one or two details the results in the first ten sections have all been obtained in one form or another by Cartan. But most of them are only proved directly by Cartan for group manifolds, and for other symmetric affine spaces they appear as consequences of the second

[3]) In using the word "symmetric" we must, of course, be careful to avoid confusion with the expression "symmetric affine connection". We shall use the term "symmetric affine spaces" as an abbreviation for the title of this paper.

theorem to which we have referred. We obtain them directly, and use them in proving the theorem. In the last three sections we give explicit formal expressions for the transvections, which seem to be new.

2. Simple convex regions. In a forthcoming note [4]) we have shown that any non-singular point, O, in an affine space of paths, A_n, is contained in a region, C, any two points of which are joined by one, and only one segment of a path which does not leave C. We describe such a region as *simple* because not more than one, and *convex* because at least one path joins any two points. It is shown that the region given in normal coordinates at O by

$$y^i y^i < r^2, \tag{2.1}$$

for a sufficiently small positive r, is simple and convex. Let C_0 be a simple convex region given by (2.1) for $r = r_0$. As follows in an obvious way from the note referred to above, a positive r_1 exists, such that the reflexion about any point of C_1, given by (2.1) for $r = r_1$, or on its boundary, carries C_1 into a region which is still contained in C_0.

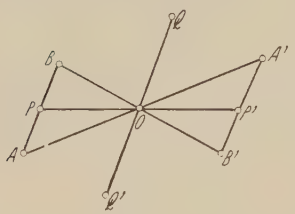

Fig. 1.

Let A, B and O be any three points in C_1, and let P be any point between A and B, by which we mean that P lies on the path joining A to B. Let A', B' and P' be the points such that O lies between AA', BB' and PP', and [5]) $AO = OA'$, $BO = OB'$, $PO = OP'$. We take as the definition:

An affine space of paths, A_n, will be called symmetric if, and only if, P' lies between A' and B', and

$$AP : PB = A'P' : P'B'$$

for any three points A, B and O in C_1 and any point P between A and B.

It follows immediately that the reflexion about each point in an affine space is an affine collineation if, and only if, the space is symmetric. This is, indeed, merely a restatement of our definition.

3. Parallelism. From our note on convex regions it is also obvious that r_0 can be chosen so that C_0 is entirely represented in normal coor-

[4]) Quaterly Journal of Math., (Oxford series), 1932. As in this note we shall refer to a segment of a path joining two points, as a path. A region will always mean an open region.

[5]) Though there is no comparison of distance on different paths, there is, thanks to the invariant class of affine parameterizations, a definition of ratio on each path. In fact each path is equivalent to a rectilinear segment in a Euclidean space.

dinates at each point in C_0, for a given underlying coordinate system x. It follows that each ordered pair of points, (OQ), in C_0 determines a unique contra-variant vector at O, whose components in x are the coordinates of Q in the normal coordinate system [6]) at O. We shall denote this vector by $O\bar{Q}$. In fig. 1 let OQ be the vector at O which is parallel to $\overline{AB}$ with respect to the path AO. Let O be sufficiently near A to ensure that Q lies in C_1, and let Q' be the image of Q in the reflexion about O. Then the vector $\overline{OQ'}$ is parallel to the vector $\overline{QO}$ and may be described as *anti-parallel* to $\overline{OQ}$. The reflexion about O is an affine collineation, and therefore carries any curve c, and vectors which are parallel with respect to c into a curve c' and parallel vectors with respect to c'. Therefore the vector $\overline{A'B'}$ is parallel to $\overline{OQ'}$ with respect to the path AA', since the reflexion about O carries AA' into itself, and the pair of parallel vectors $\bar{A}\bar{B}$ and $O\bar{Q}$ into the vectors $\overline{A'B'}$ and $O\bar{Q}'$ respectively. Therefore $\overline{A'B'}$ is anti-parallel to $\bar{A}\bar{B}$ with respect to the path AA'. Similarly the vectors $\bar{P}\bar{B}$ and $\overline{P'B'}$ are anti-parallel. If $AP = PB$, it follows that $A'P' = P'B'$, and the vectors $\bar{P}\bar{B}$ and $\bar{P'}\bar{A'}$ are parallel with respect to the path PP'. This gives a construction for parallelism along a path. For if P and P' are any points on a path which are not too far apart, the vectors $\bar{P}\bar{A}$ and $\overline{P'B'}$ are parallel with respect to the path PP' if, an only if, the points P' and B' are obtained from P and A respectively, by the reflexion about P followed by reflexion about the mid-point of the segment [7]) PP'.

4. Transvections. The transformation obtained by reflecting first about a point O, and then about a point S is called by Cartan a *transvection* having the path OS as its *base* [8]).

We shall describe this transformation as a transvection *along* the path OS. From the definition it follows that transvections are affine collineations for symmetric affine spaces. In order that all points which enter into a discussion of transvections shall lie in the region C_0, we have to start with a region C_2, which is related to C_1 as C_1 is related to C_0. The region C_2 is given by (3.1) for $r = r_2 < r_1$, where r_2 is so small

---

[6]) This correspondence is invariant, for normal coordinates and the components of a contra-variant vector both undergo the same linear homogeneous transformation when the coordinates, x, are changed.

[7]) In G. T., § 52, Cartan gives this construction for parallelism with respect to the symmetric affine connection of a group manifold. His proof makes use of the two integrable affine connections. His theorem that any symmetric affine space is equivalent to a totally geodesic sub-space in the manifold of its group gives an indirect proof of this construction, which we use in proving the theorem.

[8]) C. G., p. 47. In the flat case this is one way of defining a translation.

that the reflexion about any point in C_2, or on its boundary, carries C_2 into a region contained in C_1.

From the last section it follows that two vectors $\overline{OP}$ and $\overline{O'P'}$ in C_2 are parallel with respect to the path OO' if, and only if, the transvection obtained by reflecting first about O and then about the mid-point of OO', carries P into P'. But we have proved more than this. For the reflection about O carries any vector $\overline{PQ}$ into a vector $\overline{P'Q'}$ which is anti-parallel to PQ with respect to the path PP'. Let S be any other point on the path PP'. The reflexion about S carries $\overline{P'Q'}$ into a vector $\overline{P''Q''}$ which is anti-parallel to $\overline{P'Q'}$ and therefore parallel to $\overline{PQ}$, with respect to the path PP'. Therefore any transvection along a given path carries each vector $\overline{PQ}$, at a point P on the path, into a vector $\overline{P'Q'}$ which is parallel to $\overline{PQ}$ with respect to the path.

There is one, and only one vector, $\overline{P'Q'}$, parallel to a given vector, $\overline{PQ}$, with respect to the path PP', and therefore any transformation which carries a given path PP' into itself, and every vector at each point of the path into a parallel vector, is a transvection. As in the flat case, therefore, a transvection is completely determined by any pair of corresponding points on its base. From the other fundamental properties of parallelism with respect to a given curve, namely:

1. If $\overline{P'Q'}$ is parallel to $\overline{PQ}$, then PQ is parallel to $\overline{P'Q'}$;

2. If $\overline{P''Q''}$ is parallel to $\overline{P'Q'}$ and $\overline{P'Q'}$ is parallel to $\overline{PQ}$, then $\overline{P''Q''}$ is parallel to $\overline{PQ}$.

We have the theorem:

The transvections along a given path constitute a one-parameter pseudo-group [9]).

This pseudo-group may be regarded as the continuous displacement of regions contained in C_0 along the path PP'.

Moreover the transvection obtained by successive reflexions about O and S, is the same as that obtained by successive reflexions about O_1 and S_1, where the points O, S, O_1 and S_1 are on the same path, $OS = O_1S_1$, and the order of O_1 and S_1 is the same as that [10]) of O and S. For each transvection is completely determined by any pair of corresponding points on its base, and also determines a translation of its base into itself.

---

[9]) A pseudo-group is a set of transformations containing the inverse of each one, and the resultant of any two provided it exists. See chap. III of a forthcoming Cambridge tract by O. Veblen and the present author.

[10]) In other words the vectors $\overline{OS}$ and $\overline{O_1S_1}$ are parallel with respect to the path OS.

Hence our assertion follows from the corresponding theorem about translations in one-dimensional Euclidean geometry[11]).

Since the reflexion about any point O is given by $y^1 = -y^2$ in normal coordinates at O, it follows that transvections are given by analytic equations in allowable coordinate systems[12]).

5. Properties of the normal tensors[13]). Symmetric affine spaces are particularly interesting because of the simple relation which exists between the topological properties of the paths and the normal tensors. For let O be a non-singular point in any affine space of paths, A_n, and let y be a normal coordinate system at O. The components in y of the affine connection are given by

$$C^i_{jk} = \sum_s \frac{1}{s!} A^i_{jkl_1 \dots l_s} y^{l_1} \dots y^{l_s}, \tag{5.1}$$

where $A^i_{jkl_1 \dots l_s}$ are the components of the s^{th} normal tensor. The transformation

$$\bar{y}^i = -y^i$$

carries C into the affine connection whose components are

$$\bar{C}^i_{jk}(\bar{y}) = -C^i_{jk}(y), \tag{5.2}$$

and in order that this reflexion shall be an affine collineation it is necessary and sufficient that

$$\bar{C}^i_{jk}(\bar{y}) = C^i_{jk}(\bar{y}),$$

or from (5.2), that $C^i_{jk}(y)$ be odd functions of y. We have therefore:

A necessary and sufficient condition for A_n to be symmetric is that

$$A^i_{jkl_1 \dots l_{2s}} = 0 \qquad (s = 1, 2, \dots).$$

In particular the second normal tensor vanishes, and since

$$B^i_{jkl,m} = A^i_{jklm} - A^i_{jkl m},$$

the covariant derivative of the curvature tensor vanishes.

Conversely let the covariant derivative of the curvature tensor vanish, and let B^i_{jkl} be the components of the curvature tensor at the origin of normal coordinates at any point O. Each normal tensor is a polynomial in the components of the curvature tensor and its successive covariant derivatives[14]). In case these derivatives vanish, we have

$$Z^\alpha_p = \varphi^\alpha_p(B) \qquad (\alpha = 1, \dots, n^{p+3}), \tag{5.3}$$

---

[11]) Cf. C. G. pp. 47 and 48.

[12]) Veblen and Whitehead, loc. cit. chapters III and IV.

[13]) Cf. G. T. § 81.

[14]) O. Veblen, Cambridge tract no. 24 (1927), p. 93.

where we write Z_p^α for the components of the p^{th} normal tensor, and φ_p^α is a polynomial in the components B^i_{jkl}. Applying the transformation of coordinates

$$\bar{y}^i = \frac{1}{\lambda} y^i,$$

we have, with the notation of (5.3),

$$Z_p^\alpha = \lambda^{p+1} Z_p^\alpha.$$

From (5.3) it follows that

$$\varphi_p^\alpha(\lambda^2 B) = \lambda^{p+1} \varphi_p^\alpha(B),$$

or that φ_p^α is homogeneous of degree $\frac{p+1}{2}$. Since φ_p^α is a polynomial it is identically zero unless p is odd. Therefore[15]):

For A_n to be symmetric it is necessary and sufficient that the covariant derivative of the curvature tensor shall be zero.

An affine space is completely characterized by the components of the normal tensors at any point. The coefficients in the polynomials φ_p^α are integers which do not vary from one space to another, and therefore:

A symmetric affine space is characterized by the values at any one point of the components of the curvature tensor.

6. Collineations with a fixed point[16]). Let y be normal coordinates at a point O in any affine space of paths, A_n, and let

$$\bar{y}^i = \bar{y}^i(y) \tag{6.1}$$

---

[15]) A homology about a point O may be defined as the transformation given in normal coordinates at O, by

$$y^i - \frac{1}{\lambda} y^i,$$

for some constant $\lambda \neq 0$. An affine space which admits a homology, other than the identity or the reflexion, about a non-singular point O is flat. For there exist normal coordinates at O, and if a homology $\bar{y}^i = \frac{y^i}{\lambda}$ carries the connection into itself, it follows that

$$A^i_{jkl_1 \ldots l_p} = \lambda^{p+1} A^i_{jkl_1 \ldots l_p}.$$

If $\lambda \neq \pm 1$ each normal tensor vanishes, and the space is flat. If O is a singularity for the affine connection the space may admit all homologies. This will occur if, and only if, an allowable coordinate system exists in which coordinates of O are $(0, \ldots, 0)$, the paths through O are given by $y^i = p^i s$, where s is an affine parameter, and the components of the affine connection are homogeneous of degree minus one. Affine spaces of this kind are significant in generalized projective geometry. See Whitehead, Annals of Math. **32** (1931), § 6, and a forthcoming paper by D. van Dantzig.

[16] Cf. G. T. pp. 80 et seq.

define any transformation which carries paths through O into paths through O. If this transformation is to preserve ratios on each path it must be homogeneous of the first degree. If it is to be analytic at the origin it must therefore be linear and homogeneous. Therefore the largest group, h, of affine collineations in A_n, which leave O unaltered, is generated by infinitesimal operators of the form

$$dy^i = y^j \alpha_j^i \, dt,$$

where α_j^i are constants. If A_n is symmetric it follows from the last theorem in § 2, that the group h is generated by a complete set of solutions $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, to the algebraic equations

$$\alpha_s^i B_{jkl}^s - \alpha_j^s B_{skl}^i - \alpha_k^s B_{jsl}^i - \alpha_l^s B_{jks}^i = 0, \tag{6.2}$$

where B_{jkl}^i are the components of the curvature tensor, evaluated at the origin. From the equations

$$B_{spq}^i B_{jkl}^s - B_{jpq}^s B_{skl}^i - B_{kpq}^s B_{jsl}^i - B_{lpq}^s B_{jks}^i = B_{jkl,p,q}^i - B_{jkl,q,p}^i = 0,$$

we have,

$$B_{jkl}^i = B_{kl}^\sigma \alpha_{j\sigma}^i \qquad (\sigma = 1, \ldots, s),$$

for some values of B_{kl}^σ, and therefore h certainly contains other members than the identity.

7. Invariance of the transvections under h. Let H be any transformation in the group h, defined in § 6 with respect to a point O. Let C_3 be the region given by (2.1) for $r = r_3$, and r_3 may be chosen sufficiently small to ensure that all the points referred to in this section lie in C_0. Let Q be any other point in C_3 which is carried by H^{-1} into a point P. We write

$$\begin{cases} P = H^{-1}(Q), \\ Q = H(P). \end{cases}$$

Let S be any transvection along a path OA and let

$$\begin{cases} A = S(O), \\ P' = S(P) = SH^{-1}(Q), \end{cases}$$

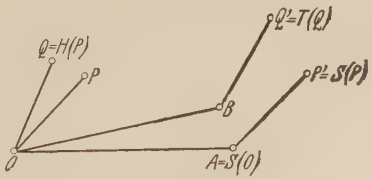

Fig. 2.

so that $\overline{OP}$ and $\overline{AP'}$ are parallel with respect to the path OA. Let

$$\begin{cases} B = H(A), \\ Q' = H(P') = HSH^{-1}(Q). \end{cases}$$

The transformation H carries the path OA into the path OB, and the vectors $\overline{OP}$ and $\overline{AP'}$ into a pair of vectors OQ and BQ', which are parallel with respect to OB. This is true for each point Q in C_3 and therefore the transformation

$$T = HSH^{-1}$$

is a transvection. As in the flat case, therefore, the set of transvections along paths through O is invariant, or self conjugate, under h. This set of transvections is not a group, however, unless the space is flat (see (8.9)).

Let A_0 and B_0 be the mid-points of OA and OB respectively. Then S is the resultant of successive reflexions about O and A_0, T the resultant of successive reflexions about O and B_0, and

$$B_0 = H(A_0).$$

8. The infinitesimal group of collineations[17]. The transvections along paths through O constitute a transitive set. Therefore this set of transvections together with the group h, defined in § 6, constitute the largest continuous group of affine collineations in A_n. We shall denote this group[18] by g.

Let the vectors

$$\eta_1, \ldots, \eta_r \qquad (r = n + s)$$

be the infinitesimal generators of g, where η_a $(a = 1, \ldots, n)$ generates the transvections along the path given by

$$\begin{cases} y^i = 0, & i \neq a, \\ y^a = s, \end{cases}$$

in normal coordinates at O, and[19]

$$\eta^i_\sigma = y^j \alpha^i_{j\sigma} \qquad (\sigma = n+1, \ldots, r), \tag{8.1}$$

where $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_r$ is a complete set of independent solutions to the equations (6.2). Let

$$\gamma^\lambda_{\mu\nu} \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, r)$$

denote the constants of structure of g. From § 7 it follows that

$$\boxed{\gamma^\varrho_{\sigma i} = 0 \qquad (\varrho, \sigma = n+1, \ldots, r)}. \tag{8.2}$$

From § 4 it follows that each infinitesimal transformation

$$\bar{y}^i = y^i + \varepsilon \eta^i_a,$$

carries vectors at the origin into parallel vectors at the point $\varepsilon \eta^i_a$. Therefore the vectors

$$\delta^i_b \quad \text{and} \quad \delta^i_b + \varepsilon \left(\frac{\partial \eta^i_a}{\partial y^b}\right)_0 + O(\varepsilon^2)$$

[17] Cf. G. T. p. 77–82.

[18] Strictly speaking, g is a pseudo-group (see § 4). But so long as we confine our attention to its infinitesimal properties it may be thought of as a group.

[19] Roman indices will run from 1 to n, Greek indices will take on values indicated in the text.

are parallel. But in normal coordinates the components of parallel vectors at points near the origin only differ by second order quantities. Therefore

$$\left(\frac{\partial \eta_a^i}{\partial y^b}\right)_0 = 0. \tag{8.3}$$

From (8.3), the relations

$$\frac{\partial \eta_b^i}{\partial y^j}\eta_c^j - \frac{\partial \eta_c^i}{\partial y^j}\eta_b^j = \gamma_{bc}^{\alpha}\eta_\alpha^i \qquad (\alpha = 1, \ldots, r), \tag{8.4}$$

and from

$$\begin{cases} (\eta_a^i)_0 = \delta_a^i, \\ (\eta_\sigma^i)_0 = 0 \end{cases} \qquad (\sigma = n+1, \ldots, r) \tag{8.5}$$

it follows that

$$\boxed{\gamma_{bc}^a = 0 \qquad (a, b, c = 1, \ldots, n)}. \tag{8.6}$$

This property of transvections is analogous to the commutative property of translations in the flat case. In § 10, however, we shall show that it is only an infinitesimal property.

From (8.1), (8.5), and the relations

$$\left(\frac{\partial \eta_\sigma^i}{\partial y^j}\eta_b^j - \frac{\partial \eta_b^i}{\partial y^j}\eta_\sigma^j\right)_0 = \gamma_{\sigma b}^{\alpha}(\eta_\alpha^i)_0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

it follows that

$$\boxed{\gamma_{\sigma b}^a = \alpha_{b\sigma}^a \qquad (\sigma = n+1, \ldots, r)}. \tag{8.7}$$

The conditions that a vector η generate a continuous group of affine collineations may be written[20])

$$\eta_{,jk}^i + A_{jks}^i \eta^s = 0, \tag{8.8}$$

where $\eta_{,jk}^i$ is the second extension of the vector η, and A_{jkl}^i is the first normal tensor. Differentiating (8.4) with respect to y^k, and evaluating at the origin, we have

$$(\eta_{b,ck}^i - \eta_{c,bk}^i)_0 = \gamma_{bc}^{\sigma}\alpha_{k\sigma}^i \qquad (\sigma = n+1, \ldots, r),$$

and from (8.8) and (8.7) it follows that

$$(A_{kbc}^i - A_{kcb}^i)_0 = \gamma_{bc}^{\sigma}\alpha_{k\sigma}^i,$$

---

[20]) L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry (1927), p. 126. To obtain these conditions in the form (8.8) let

$$y^i = y^i + \varepsilon\eta^i.$$

If this transformation carries an affine connection, C_{jk}^i, into itself, it follows from the transformation law for an affine connection that

$$\frac{\partial C_{jk}^i}{\partial y^s}\eta^s = \frac{\partial \eta^i}{\partial y^s}C_{jk}^s - C_{sk}^i\frac{\partial \eta^s}{\partial y^j} - C_{js}^i\frac{\partial \eta^s}{\partial y^k} - \frac{\partial^2 \eta^i}{\partial y^j \partial y^k}.$$

Evaluating at the origin of normal coordinates we have (8.8).

or

$$\boxed{(B^i_{jkl})_0 = \gamma^i_{\sigma j}\gamma^\sigma_{kl}} \,. \tag{8.9}$$

Notice that the transvections along the paths through O do not constitute a group unless A_n is flat.

9. Cartan's theorem. All the transformations of g which lie in a certain neighborhood of the identity may be obtained from differential equations of the form

$$\frac{dy^i}{dt} = \eta^i_\alpha p^a \qquad (\alpha = 1, \ldots, r),$$

where p^α are constants. These equations may be integrated to obtain

$$\bar{y}^i = \varphi^i(y, e^1, \ldots, e^r),$$

where $\varphi^i(y, 0) = y^i$, and $e^1, \ldots, e^r$ are the canonical parameters given by

$$e^\alpha = p^\alpha t.$$

Let V_r be the manifold [21]) of the group g. Then e is a normal coordinate system at the identity [22]).

---

[21]) The law by which the elements of any group are combined determines two groups of transformations which permute the elements of the group among themselves. H. Weyl calls them the group of right handed, and the group of left handed translations, respectively. Corresponding to any element s there is a right handed translation $x \to y$, given by

$$y = x + s,$$

and a left handed translation $x \to y'$, given by

$$y' = s + x,$$

where we symbolize the association of elements by addition instead of by multiplication, as suggested by Prof. Veblen. A vector may be defined as an ordered pair of elements (p, x), and two vectors (p, x) and (q, y) are said to be $(+)$-parallel if the right handed translation $p \to x$ also carries q into y. That is if

$$y - x = q - p.$$

The vector (q, y) is $(-)$-parallel to (p, x) if the left handed translation $p \to x$ carries q into y. That is if

$$y - q = x - p.$$

The starting point for the researches of Cartan and Schouten, referred to in § 1, was the study of the $(\pm)$-parallelisms in the manifold of a Lie group by means of two affine connections, $\Gamma^\pm$. These affine connections are asymmetric unless the group is Abelian, but have the same symmetric part. For the element y lies half way between two near-by elements, x and z, with respect to the paths determined by Γ^+, if and only if,

$$z - y = y - x.$$

This is also a necessary and sufficient condition that y be half way between x and z with respect to Γ^-. It follows that $\Gamma^\pm$ determine the same parameterized paths, and therefore that they have the same symmetric part. Cartan's theorem refers to these paths.

[22]) J. A. Schouten, Math. Annalen loc. cit. §§ 5 and 6.

The components in e of the curvature tensor for the symmetric affine connection in V_r, are given at the origin by

$$(9.1) \qquad (R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu})_0 = \frac{1}{4}\gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\gamma^{\nu}_{\lambda\mu},$$

where $\gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ are the constants of structure for g, which are determined by the generating vectors $\eta_1, \ldots, \eta_r$. Let V_n be the sub-space of V_r which consists of the transvections. Then V_n in given by

$$e^{\sigma} = 0 \qquad (\sigma = n+1, \ldots, r),$$

and from (8.2) and (8.6) it follows that

$$(9.2) \qquad \gamma^{\sigma}_{\alpha j}\gamma^{\alpha}_{kl} = 0 \qquad (\sigma = n+1, \ldots, r;\ \alpha = 1, \ldots, r).$$

Therefore V_n is totally geodesic, and is a symmetric affine space[23]). The components of the curvature tensor for V_n are given at the origin by

$$(9.3) \qquad R^{i}_{jkl} = \frac{1}{4}\gamma^{i}_{\sigma j}\gamma^{\sigma}_{kl} \qquad (\sigma = n+1, \ldots, r).$$

The equations

$$e^{i} = 2y^{i}$$

define a transformation $y \rightarrow e$ which carries each point P_y in A_n, near O, into the transvection, T_e, obtained by successive reflexions about O and P_y. The curvature tensor of A_n is carried into the tensor given by

$$\overline{B}^{i}_{jkl} = \frac{1}{4}B^{i}_{jkl}.$$

From (8.9) and (9.3) it follows that

$$(\overline{B}^{i}_{jkl})_0 = (R^{i}_{jkl})_0,$$

and from the last theorem in § 5 we have Cartan's theorem:

Any affine space of constant curvature is equivalent to a totally geodesic sub-space in the manifold of its group.

This sub-space in the group manifold is the totality of transvections.

10. Parallelograms. From (8.6) it follows that the commutator of two transvections agrees with some transformation of h as far as second order quantities are concerned. Let us denote by T_S the transvection along the path OS, which carries the origin, O, into any point S. With the notation used in § 7 we write

$$S = T_S(O).$$

We shall show that A_n is flat if the transformation, T_{AB}, given by

$$T_{AB} = T_B^{-1}T_A^{-1}T_B T_A,$$

---

[23]) G. T. pp. 72 and 75.

belongs to h for pairs of points, A and B, near O. Let this be the case, so that T_{AB} leaves O unaltered.

Let

$$C = T_B(A) = T_B\, T_A(O),$$

and let

$$B' = T_A^{-1}(C) = T_A^{-1}\, T_B\, T_A(O).$$

By our hypothesis, $T_B^{-1}(B') = O$. It follows that $B = B'$, and therefore

$$C = T_A(B).$$

The vectors $\overrightarrow{OB}$ and $\overrightarrow{AC}$ are parallel with respect to the path OA, and $\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{BC}$ are parallel with respect to OB. Let U be any point between O and A and let

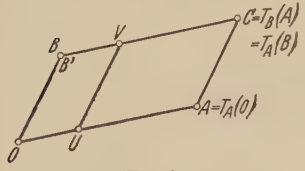

Fig. 3.

$$V = T_U(B).$$

As before it follows that

$$V = T_B(U),$$

and since transvections are affine collineations, V lies between[24]) B and C, and

$$BV : VC = OU : UA = s,$$

where $0 \leqq s \leqq 1$. As U varies from O to A, s will vary from 0 to 1 and will define an affine parameterization for each of the paths OA and BC. The vectors $\eta_1, \ldots, \eta_n$ will therefore define congruences of paths with affine parameterizations. That is to say a set of solutions to the equations

$$\frac{dy^i}{ds} = p^a\, \eta_a^i,$$

where p^a are any constants, will satisfy

$$\frac{d^2y^i}{ds^2} + C_{jk}^i \frac{dy^j}{ds}\frac{dy^k}{ds} = 0.$$

The necessary and sufficient conditions for this to be the case are

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta_a^i}{\partial y^j}\,\eta_b^j + \frac{\partial \eta_b^i}{\partial y^j}\,\eta_a^j\right) + C_{jk}^i\, \eta_a^j\, \eta_b^k = 0.$$

Differentiating these equations with respect to y^l and evaluating at the origin, it follows from (8.3) and (8.5) that

$$\frac{1}{2}(\eta_{a,\,bl}^i + \eta_{b,\,al}^i)_0 + A_{abl}^i = 0,$$

and from (8.8) that

$$-\frac{1}{2}(A_{bla}^i + A_{lab}^i)_0 + A_{abl}^i = 0.$$

From the cyclic identities

$$A_{abl}^i + A_{bla}^i + A_{lab}^i = 0,$$

[24]) Cf. G. T. § 95.

it follows that

$$A^i_{abl} = 0,$$

and therefore that A_n is flat.

11. Parallelism with respect to a point. In order to give the equations of the transvections we need a few properties of affine connections in general. Let O be any point in a simple convex region in any affine space of paths, and let η_0 be any contravariant vector at O. At any point, P, near O there is a unique vector $\eta(P)$ which is parallel to η_0 with respect to the path OP. Let the convex region be represented in a coordinate system x, in which q^i are the coordinates of O. The components of $\eta(P)$ are obtained by integrating the differential equations

$$(11.1) \qquad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds} = 0, \\ \text{b)} & \dfrac{d\eta^i}{ds} + \eta^j\Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^k}{ds} = 0, \end{cases}$$

and imposing the initial conditions

$$x^i(o) = q^i, \quad \left(\frac{dx^i}{ds}\right)_0 = p^i \quad \text{and} \quad \eta^i(o) = \eta^i_0,$$

where the vector p^i is such that

$$(11.2) \qquad y^i = p^i s$$

are the coordinates of P in the normal coordinate system at O for the coordinate system x.

Differentiating these equations repeatedly we obtain

$$(11.3) \qquad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{d^rx^i}{ds^r} + \Gamma^i_{k_1\ldots k_r}\dfrac{dx^{k_1}}{ds}\cdots\dfrac{dx^{k_r}}{ds} = 0, \\ \text{b)} & \dfrac{d^r\eta^i}{ds^r} + \eta^j\Gamma^i_{jk_1\ldots k_r}\dfrac{dx^{k_1}}{ds}\cdots\dfrac{dx^{k_r}}{ds} = 0, \end{cases}$$

where the coefficients Γ are given by the recursive formula

$$(11.4) \qquad \Gamma^i_{k_1\ldots k_r} = \Gamma^i_{k_1k_2;k_3;\ldots;k_r},$$

the semi-colon indicating the formal operation of covariant differentiation with respect to the *lower indices alone*[25]). Therefore the vector $\eta(P)$ is given by

$$(11.5) \qquad \eta^i(q, y) = \eta^j_0\Gamma^i_j(q, y),$$

[25]) Only the coefficients $\Gamma^i_{(k_1\ldots k_r)}$ appear in (11.3a), and $\Gamma^i_{j(k_1\ldots k_r)}$ in (11.3b), where the parentheses indicate symmeterization with respect to the indices enclosed. The operation of symmeterization is interchangeable with that indicated by the semi-colon, and (11.4), with the subscripts enclosed in parentheses, is a simplification of the formulæ given by Veblen (p. 84), in the tract referred to in § 5. This simplification is due to Bortolotti, Annali di Mat. p. ed. a. 8 (1930), p. 68.

where

$$\Gamma^i_j(q, y) = \delta^i_j - \sum_r \frac{1}{r!}\Gamma^i_{jk_1\dots k_r}(q)\, y^{k_1}\dots y^{k_r}, \tag{11.6}$$

and y^i are given by (11.2). Under a transformation of coordinates $x \to \bar{x}$, the components Γ^i_j behave like a contravariant vector at P, with respect to the upper index, and like a covariant vector at O with respect to the lower index.

12. Let

$$y^i = \psi^i(x, q) \quad \text{and} \quad \bar{y}^i = \psi^i(x, \bar{q}),$$

respectively, be normal coordinates for the points q and $\bar{q}$, and the same underlying coordinate system x. The point transformation $x \to \bar{x}$, given by

$$\psi^i(\bar{x}, \bar{q}) = \psi^i(x, q), \tag{12.1}$$

carries q into $\bar{q}$ and paths through q into paths through $\bar{q}$, preserving ratios on each path. For

$$\psi^i(\bar{q}, \bar{q}) = \psi^i(q, q) = 0,$$

and paths through q and $\bar{q}$ are given by

$$\psi^i(x, q) = p^i s \quad \text{and} \quad \psi^i(\bar{x}, \bar{q}) = p^i s,$$

respectively, where p^i are arbitrary constants, and s is an affine parameter in each case. From the preliminary remarks in § 6 it follows that the most general point transformation satisfying these conditions is given by

$$\psi^i(\bar{x}, \bar{q}) = a^i_j \psi^j(x, q), \tag{12.2}$$

where $\|a^i_j\|$ is any constant matrix whose determinant is not zero. The matrix $\|a^i_j\|$ is uniquely determined by the condition that a given set of independent vectors $v_1, \dots, v_n$ at q, be carried into a given set of independent vectors, $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$, at $\bar{q}$. For

$$\left(\frac{\partial \psi^i(x, q)}{\partial x^j}\right)_q = \left(\frac{\partial \psi^i(\bar{x}, \bar{q})}{\partial \bar{x}^j}\right)_{\bar{q}} = \delta^i_j,$$

by the definition of normal coordinates, and therefore the transformation in question is given by

$$\bar{u}^a_i \psi^i(\bar{x}, \bar{q}) = u^a_i \psi^i(x, q), \tag{12.3}$$

where $u^a_j v^i_a = \bar{u}^a_j \bar{v}^i_a = \delta^i_j$. The equations (12.2) are equivalent to (12.3) if

$$a^i_j = \bar{v}^i_a u^a_j. \tag{12.4}$$

The relations $y^i = \psi^i(x, q)$ are obtained by a formal solution of the equations

$$x^i - q^i = y^i - \sum_r \frac{1}{r!}\Gamma^i_{k_1\dots k_r}(q)\, y^{k_1}\dots y^{k_r},$$

and the equations (12.2) may therefore be written

$$\bar{x}^i - \bar{q}^i = \varphi^i(x, q) - \sum_r \frac{1}{r!} \Gamma^i_{k_1 \dots k_r} \varphi^{k_2} \dots \varphi^{k_r}, \tag{12.5}$$

where

$$\varphi^i(x, q) = a^i_j \psi^j(x, q).$$

13. Equations of the transvections. Let O be any point in a symmetric affine space. The transvection along a path OP, which carries O into P, is an affine colineation, and carries a given set of independent vectors, $v_1, \dots, v_n$, at O into a set of vectors $\eta_1(P), \dots, \eta_n(P)$, such that η_a is parallel to v_a with respect OP. Therefore, η_a is given in a coordinate system x, by

$$\eta^i_a = \Gamma^i_j(q, p)\, v^j_a,$$

where q^i are the coordinates of O in x, p^i are the coordinates of p in the normal coordinate system at O for the coordinate system x, and Γ^i_j are given by (11.6). The transvection $O \to P$ is given by (12.5), with

$$a^i_j = \Gamma^i_k\, v^k_b\, u^b_j = \Gamma^i_j(q, p).$$

If x is already a normal coordinate system at O these equations become

$$\bar{y}^i = \bar{q}^i - z^i - \sum_r \frac{1}{r!} C^i_{k_1 \dots k_r}(p)\, z^{k_1} \dots z^{k_r},$$

where[26])

$$z^i = \Gamma^i_j(o, p)\, y^j.$$

The invariance of the transvections under transformations of the group h (see § 7) may be proved formally from the fact that[27])

$$\begin{cases} C^i_{k_1 \dots k_r}(\tilde{p}) = \alpha^i_s\, C^s_{t_1 \dots t_r}(p)\, \beta^{t_1}_{k_1} \dots \beta^{t_r}_{k_r}, \\ \tilde{z}^i = \alpha^i_s\, z^s, \end{cases} \tag{13.2}$$

where

$$\tilde{y}^i = \alpha^i_s\, y^s \tag{13.3}$$

is any transformation belonging to h, and $\alpha^i_s \beta^s_j = \delta^i_j$. The relations (13.2) follow from the fact that (13.3) is a collineation, and therefore carries all invariants of the affine connection into themselves.

Added in proof. In comparing our §§ 8 and 9 with C. G. notice that (8.2) and (8.6) follow from the fact that the reflexion about O is an automorphism of g. This reflexion leaves each transformation of h unaltered, and carries each transvection along a path through O into its inverse. Therefore the constants γ with an odd number of Roman indices all vanish.

---

[26]) Cf. T. Y. Thomas, Proc. Nat. Acad. of Sciences **16** (1930), p. 761.

[27]) Under linear transformations $C^i_{k_1 \dots k_r}$ behave like the components of tensors.

(Eingegangen am 15. Juni 1931.)

Zylindrische Strahlensysteme.

Von

Wolfgang Haack in Danzig-Langfuhr.

In einer Folge von Arbeiten wurde die affine Differential-Geometrie der Strahlensysteme behandelt. Die ersten Untersuchungen galten den allgemeinen Strahlensystemen, die zwei verschiedene im Endlichen liegende Brennflächen besitzen[1]). Es zeigte sich, daß ein solches System durch eine quadratische und eine kubische Differentialform vollständig bis auf allgemeine affine Transformationen des Raumes bestimmt wird, und daß es daher drei voneinander unabhängige Invarianten gibt. Der formale Apparat versagt bei den parabolischen und zylindrischen Systemen. In einem parabolischen Systeme fallen die beiden Brennflächen in eine einzige Fläche zusammen. Die Systemstrahlen sind die eine Schar der Haupttangenten dieser Fläche. Die Affin-Geometrie der parabolischen Strahlensysteme bietet also zugleich einen neuen Zugang zur affinen Flächentheorie. In zwei Arbeiten[2]) wurden die parabolischen Systeme eingehend untersucht und im besonderen die Beziehungen zur affinen Flächentheorie beleuchtet. Zwei Linearformen in Verbindung mit einer Invarianten bestimmen ein parabolisches System bzw. eine Fläche vollständig bis auf allgemeine affine Transformationen des Raumes.

Die folgenden Ausführungen sind den zylindrischen Strahlensystemen gewidmet. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß eine der beiden Brennflächen in eine uneigentliche Kurve entartet ist, die kurz die uneigentliche Kurve des Systems heißen soll[2a]). Auch hier handelt es sich um die Untersuchung der affingeometrischen Eigenschaften von Strahlensystemen; den-

[1]) Monatsh. f. Math. u. Phys. **36** (1929), S. 47–76 und S. 331–352.

[2]) Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 232–270 und **35** (1932), S. 66–79.

[2a]) Solche Systeme nennt man in der geometrischen Optik auch halbzylindrisch. Vgl. etwa: Herzberger, Strahlenoptik, Berlin 1931.

noch wurde davon abgesehen, das Wort „Affingeometrie“ in den Titel der Arbeit aufzunehmen. Betrachtet man nämlich im projektiven Raum ein Strahlensystem Σ, dessen eine Brennfläche eine ebene Kurve ist, so wird die projektive Differentialgeometrie des Systems Σ isomorph der Affingeometrie des Systems Σ, sofern man nur die Ebene der Brennkurve des Systems als uneigentliche Ebene des affinen Raumes anspricht. Die folgenden Ausführungen gestatten daher ebenso eine affine wie eine projektive Interpretation. In der Formulierung der Sätze wird zwar stets zur Erhöhung der Anschaulichkeit der affine Standpunkt dem projektiven vorgezogen; doch ist es leicht, eine Übersetzung in die Sprache des Projektiven durchzuführen.

Ein anderer Gesichtspunkt verleiht den zylindrischen Systemen erhöhtes Interesse: nämlich die Beziehung zur *elementaren Flächentheorie*. Die elementargeometrischen Invarianten einer Fläche Π können bekanntlich gedeutet werden als die projektiven Invarianten derjenigen Konfiguration, die aus einem nullteiligen Kegelschnitt (= absoluter Kugelkreis) und der Fläche Π besteht. Werden aber von den Punkten des absoluten Kegelschnitts die Tangenten an die Fläche Π gelegt, so entsteht ein zylindrisches Strahlensystem (= System der isotropen Tangenten der Fläche Π), dessen uneigentliche Kurve der absolute Kegelschnitt ist. Die affine bzw. projektive Differentialgeometrie dieses zylindrischen Systems ist also äquivalent der Elementargeometrie der Fläche Π. Umgekehrt gestattet nun die affine bzw. projektive Differentialgeometrie der zylindrischen Systeme eine flächentheoretische Deutung: Ist c die uneigentliche Kurve und Π die nichtausgeartete Brennfläche eines zylindrischen Systems, so wird die Differentialgeometrie des zylindrischen Systems zur Flächentheorie der Fläche Π gegenüber derjenigen Untergruppe projektiver Transformationen, die die Kurve c als Ganzes festhält. Die Differentialgeometrie der zylindrischen Strahlensysteme bietet also eine Verallgemeinerung der elementaren Flächentheorie derart, daß der absolute Kegelschnitt durch eine beliebige ebene Kurve ersetzt wird. Unmittelbar erhebt sich jetzt die Frage: Was bleibt bei dieser Verallgemeinerung der elementaren Flächentheorie erhalten? Um wenigstens eine Antwort anzudeuten, sei erwähnt, daß an die Stelle der zwei Integrabilitätsbedingungen der elementaren Flächentheorie von Mainardi-Codazz hier nur eine Integrabilitätsbedingung tritt. Es bleibt also in der elementaren Flächentheorie im wesentlichen alles das erhalten, was von den Mainardi-Codazzischen Differentialgleichungen unabhängig ist.

Doch diese Überlegungen gehen schon über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus. Hier handelt es sich zunächst um die Aufstellung des formalen Apparates für die Differentialgeometrie der zylindrischen Strahlensysteme, um dessen geometrische Deutung und schließlich die Be-

stimmung der einfachsten Systeme. Es wird ein begleitendes Koordinatensystem konstruiert und auf zwei invariante Linearformen der Formelapparat aufgebaut. Folgenden Hauptsatz der Differentialgeometrie erhält man, wenn die im Endlichen gelegene Brennfläche weder eine Torse noch eine Kurve ist:

Ein zylindrisches Strahlensystem ist durch zwei Linearformen φ und ψ, zwischen deren Koeffizienten eine Integrabilitätsrelation besteht, vollständig bis auf affine Transformationen des Raumes bestimmt.

Der Satz läßt sich auch in der Form aussprechen:

Zwei Invarianten Q und $\bar{Q}$, zwischen denen eine bestimmte Differentialgleichung besteht, bilden mit ihren invarianten Ableitungen ein vollständiges Invariantensystem eines zylindrischen Strahlensystems.

Außer den Invarianten Q und $\bar{Q}$ werden in den Ableitungsgleichungen noch einige Hilfsgrößen mitgeführt, die sich durch Q, $\bar{Q}$ und deren invariante Ableitungen darstellen lassen. Das Verschwinden dieser Größen wird geometrisch diskutiert. Die letzten Paragraphen bestimmen alle diejenigen Systeme, die durch eine zweigliedrige transitive Gruppe affiner Transformationen erzeugt werden können, deren Invarianten also sämtlich konstant sind, und schließlich alle Systeme, deren Invarianten Q und $\bar{Q}$ verschwinden, die aber, da ihre Brennfläche eine Torse ist, noch eine dritte von Null verschiedene Invariante B besitzen.

Als algebraisches Werkzeug dienen homogene Punkt-, Ebenen- und Linienkoordinaten, die durch Mertens' Ketten miteinander verbunden werden. Durch einen fetten lateinischen kleinen Buchstaben wird stets ein kovarianter Vektor dargestellt, dessen Komponenten die homogenen Koordinaten eines Punktes, durch einen fetten lateinischen großen Buchstaben ein kontravarianter Vektor, dessen Komponenten die homogenen Koordinaten einer Ebene sind. Kleine deutsche Lettern geben Sechservektoren, deren Komponenten entweder als ko- oder kontravariante Linienkoordinaten zu deuten sind. In der Einleitung der parabolischen Strahlensysteme (Math. Zeitschr. s. o.) wurden die algebraischen Grundlagen ausführlich behandelt, so daß hier nicht darauf eingegangen zu werden braucht.

§ 1.

Koordinatentetraeder.

Als Definition eines zylindrischen Strahlensystems übernehmen wir diejenige der allgemeinen Strahlensysteme[3]) und fügen die Bedingung hinzu,

[3]) Strahl-Syst. I § 1 oder Parab. Strahl.-Syst. § 2.

daß eine der Brennflächen eine uneigentliche Kurve ist. Das System wird dann gegeben durch den Sechservektor $\mathfrak{p}$, dessen Komponenten Funktionen zweier Parameter u, v (bzw. u^1, u^2) sind:

$$\mathfrak{p}(u, v) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}(u^1, u^2)$$

derart, daß in einem Gebiet M des Parameterraumes u, v die ersten fünf partiellen Ableitungen existieren und nirgends die Funktionalmatrix $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_u\,\mathfrak{p}_v|_1$ verschwindet. Für die Zylindrizität des Systems soll die analytische Bedingung aufgestellt werden. Wir nehmen zunächst an, daß die Parameter u, v (bzw. u^1, u^2) Torsenparameter des Systems sind. Im allgemeinen[4]) lautet die Differentialgleichung der Torsen des Systems

$$(\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_u)\, du^2 + 2(\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_v)\, du\, dv + (\mathfrak{p}_v \mathfrak{p}_v)\, dv^2 = 0.$$

Die quadratische Form, die die linke Seite dieser Gleichung ausmacht, besitzt in einem zylindrischen System stets eine von Null verschiedene Diskriminante:

$$(\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_v)^2 - (\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_u)(\mathfrak{p}_v \mathfrak{p}_v) \neq 0.$$

Die Einführung von Torsenparametern ist also immer möglich. Sie hat zur Folge, daß die Gleichungen gelten:

$$(\mathfrak{p}_u \mathfrak{p}_u) = 0; \qquad (\mathfrak{p}_v \mathfrak{p}_v) = 0.$$

Die Ableitungen nach den Torsenparametern u, v werden in diesem Paragraphen oft mit Indizes $\mathfrak{p}_u = \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_v = \mathfrak{p}_2$, ebenso $\mathfrak{p}_{uu} = \mathfrak{p}_{11}$; $\mathfrak{p}_{uv} = \mathfrak{p}_{12}$ usw. angesetzt werden.

Ein zylindrisches System besteht aus allen Tangenten, die von den Punkten einer uneigentlichen Kurve an eine Fläche gelegt werden können Wir betrachten die Umgebung eines Strahles $\mathfrak{p}$. Die eine der Torsen durch $\mathfrak{p}$ ist ein Zylinder mit der uneigentlichen Spitze $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$, wenn der Vierervektor $\boldsymbol{W}$ die uneigentliche Ebene festlegt. Wir nehmen an, daß sich längs dieser Torse der Parameter v ändert, daß also durch

$$u = \text{konst.}$$

die Zylinder des Systems gegeben werden. Der im Endlichen gelegene Brennpunkt von $\mathfrak{p}$ sei durch den Vierervektor $\boldsymbol{x}$ dargestellt. Bewegen wir uns auf der durch $\mathfrak{p}$ gehenden zylindrischen Torse, so läuft $\boldsymbol{x}$ in der zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Tangentenrichtung der Brennfläche, während der Punkt $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$ fest bleibt; daraus folgt, daß die Komponenten von $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$, $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_v$, $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{vv}$, usw. einander proportional sind. Diese Proportionalität läßt sich in Gleichungsform schreiben. Sie besagt nämlich, daß die Ebene, die durch $\mathfrak{p}$ und $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_v$

[4]) Strahl-Syst. I § 3.

geht, unbestimmt ist. Es wird also[5]):

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_v = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2 = 0,$$
$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{rv} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{22} = 0, \quad \text{etc.}$$

Angenommen, es sei $\boldsymbol{x}$ berechnet, dann wird die zu $\mathfrak{p}$ konjugierte Tangente $\mathfrak{q}$ der Brennfläche gegeben durch die Matrix

$$\mathfrak{q} = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_v\|.$$

Durchläuft man von $\mathfrak{p}$ ausgehend die Torse

$$v = \text{konst.},$$

so wandert $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$ auf der uneigentlichen Kurve des Systems. Die Tangente $\mathfrak{u}$ dieser Kurve wird gegeben durch die Matrix

$$\mathfrak{u} = \|\boldsymbol{W}\mathfrak{p};\ \mathfrak{p}_u \boldsymbol{W}\|.$$

Die Gerade $\mathfrak{p}_u$ geht durch $\boldsymbol{x}$ und liegt in der durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{u}$ aufgespannten Brennebene. Der Brennpunkt $\boldsymbol{x}$ ist der Schnittpunkt von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_u$. Daher kann der Vierervektor $\boldsymbol{x}$ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\,\mathfrak{p} &= 0 & \boldsymbol{x}\,\mathfrak{p} &= 0 \\ \boldsymbol{x}\,\mathfrak{p}_u &= 0 \quad \text{bzw.} & \boldsymbol{x}\,\mathfrak{p}_1 &= 0 \\ \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{W} &= 1 & \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{W} &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt und sogar *normiert* werden. Aus der Normierungsbedingung folgt $\boldsymbol{x}_u \boldsymbol{W} = 0$. Nunmehr erfährt das System $\mathfrak{p}(u, v)$ durch die Forderung

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p} = \boldsymbol{x}_u$$

eine eindeutige *Normierung der homogenen Koordinaten*[6]).

Jetzt können wir ein begleitendes Tetraeder angeben, auf welches die Umgebung von $\mathfrak{p}$ bezogen werden soll. Seine Kanten sind zunächst die

---

[5]) Der Nachweis kann geführt werden durch Reihenentwicklung der Umgebung des Strahles $\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{p}(u+h, v+k) = \mathfrak{p} + (h\,\mathfrak{p}_u + k\,\mathfrak{p}_v) + \frac{1}{2!}(h^2\mathfrak{p}_{uu} + 2\,h\,k\,\mathfrak{p}_{uv} + k^2\mathfrak{p}_{vv}) + \ldots .$$

Die Torse $h = 0$ soll ein Zylinder sein, es muß also die Ebene durch $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}(u, v+k)$ für jedes k unbestimmt werden; d. h.

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}(u, v)\ \mathfrak{p}(u, v+k) \equiv 0.$$

Aus der Reihenentwicklung erhält man

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p} + k\,\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_v + \frac{1}{2}k^2\,\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{vv} + \ldots \equiv 0.$$

Und daraus folgt

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_v = 0; \quad \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{vv} = 0; \quad \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{vvv} = 0, \quad \text{usw.}$$

[6]) Dabei ist vorauszusetzen, daß die Brennfläche nicht in eine Kurve entartet ist.

drei von $\mathfrak{x}$ ausgehenden Geraden $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_u$, $\mathfrak{q}$; dazu kommen die Verbindungsgeraden der uneigentlichen Punkte $W\mathfrak{p}$, $W\mathfrak{p}_u$, $W\mathfrak{q}$, die wir mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bezeichnen wollen. Als Grundformeln gelten für das Folgende:

$$(1) \qquad W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2 = 0, \quad W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{22} = 0, \quad W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{222} = 0, \quad \ldots.$$

$$(2) \qquad \mathfrak{x}\,\mathfrak{p} = 0, \qquad \mathfrak{x}\,\mathfrak{p}_1 = 0, \qquad \mathfrak{x}W = 1.$$

$$(3) \qquad W\mathfrak{p} = \mathfrak{x}_1.$$

$$(4) \qquad \mathfrak{q} = \|\mathfrak{x}; \mathfrak{x}_2\| \quad \text{und} \quad W\mathfrak{q} = \mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{q}\,W = -\mathfrak{x}_2.$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= \|W\mathfrak{p}; \mathfrak{p}_1 W\| = -\|W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1; W\|, \\ \mathfrak{v} &= \|W\mathfrak{p}; \mathfrak{x}_2\|, \\ \mathfrak{w} &= -\|W\mathfrak{p}_1; \mathfrak{x}_2\|. \end{aligned}$$

$$(6) \qquad (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1) = 0, \quad (\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2) = 0.$$

Für die Skalarprodukte zwischen den Tetraederkanten erhält man die folgende Tabelle:

(7)

	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}_1$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{p}$	0	0	0	0	0	E
$\mathfrak{p}_1$	0	0	0	0	E	0
$\mathfrak{q}$	0	0	0	E	0	0
$\mathfrak{u}$	0	0	E	0	0	0
$\mathfrak{v}$	0	E	0	0	0	0
$\mathfrak{w}$	E	0	0	0	0	0

Die nichtverschwindenden Skalarprodukte werden

$$(8) \qquad E = \mathfrak{p}\,\mathfrak{w} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{v} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{u} = W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}_2.$$

Es soll noch gezeigt werden, daß die Gleichung besteht:

$$(9) \qquad (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) = -E.$$

Zum Beweis formt man E geeignet um:

$$E = W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{x}_2 = -W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\,\mathfrak{x}_2.$$

Nach (2) ist $\mathfrak{p}\,\mathfrak{x} = 0$. Durch Ableitung folgt $\mathfrak{p}\,\mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{p}_2\mathfrak{x}$, so daß man erhält

$$E = +W\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{x} = -W\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1\mathfrak{x} - (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)\,W\mathfrak{x}.$$

Nach (2) ist $\mathfrak{p}_1\mathfrak{x} = 0$ und $\mathfrak{x}W = W\mathfrak{x} = 1$, also $E = -(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$.

§ 2.

Die formalen Grundlagen.

Die formale Seite des Problems verlangt die Aufzählung der ko- und kontravarianten Tensoren, ihrer Überschiebungen und Invarianten. Die Differentialgleichung der Torsen bietet sich als quadratische Grundform an; ihre Koeffizienten

$$G_{ik} = (\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k) \tag{1}$$

dienen als Grundtensor des Ricci-Kalküls zur Bildung kovarianter Ableitungen. Es seien zunächst unter $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_{ik}$, ... solche kovariante Ableitungen verstanden. Dann findet man unmittelbar drei weitere Tensoren, nämlich:

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{ik}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\boldsymbol{W}}{|G_{11}G_{22} - G_{12}^2|^{\frac{1}{2}}}, \\ B_{ikl} &= \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{kl}\boldsymbol{W}, \\ C_{ikl} &= (\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{kl}). \end{aligned} \tag{2}$$

Der Tensor C_{ikl} erweist sich als bedeutungslos: man erhält nämlich als kovariante Ableitung des Grundtensors, die bekanntlich verschwindet,

$$(\mathfrak{p}_{il}\mathfrak{p}_k) + (\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{kl}) = 0$$

oder

$$C_{kil} + C_{ikl} = 0.$$

Das hat zur Folge, daß die Koeffizienten der Form $C_{ikl}du^i du^k du^l$ sämtlich Null sind und damit die Form unbrauchbar ist.

In einem zylindrischen Strahlensystem wird

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k\boldsymbol{W} = 0. \tag{3}$$

Zur Untersuchung des Tensors B_{ikl} gehen wir von Torsenparametern aus. Dann ist

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\boldsymbol{W} = 0.$$

Durch kovariante Ableitung erhält man $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{21}\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_2\boldsymbol{W}$ oder

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{21}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}\boldsymbol{W} \tag{4}$$

und

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{22}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{12}\boldsymbol{W}. \tag{5}$$

Da aber nach § 1 Gl. (1) $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2 = 0$ die Bedingung für zylindrische Systeme ist, verschwinden in (4) und (5) die rechten Seiten, so daß man erhält:

$$B_{211} = B_{121} = B_{112} = B_{122} = B_{212} = B_{221} = 0.$$

Weiter ist nach § 1 G. (1) $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{22} = 0$, daraus folgt

$$B_{222} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{22}\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{22}\mathfrak{p}_2\boldsymbol{W} = 0.$$

Dagegen ist $B_{111} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_{11}\,\boldsymbol{W}$ sicher von Null verschieden, *wenn die uneigentliche Kurve des Systems keine Gerade ist.* Daher nimmt die Form

$$B_{ikl}\,du^i\,du^k\,du^l$$

für Torsenparameter die einfache Gestalt an

$$B_{111}\,du^1\,du^1\,du^1. \tag{6}$$

Ihre Nullflächen sind die dreifach zählenden zylindrischen Torsen des Systems. Kehren wir zu allgemeinen Parametern zurück, dann wird durch das Gleichungssystem

$$B_{ikl} = n_i n_k n_l \tag{7}$$

ein Tensor erster Stufe n_i bestimmt, der eine Linearform definiert

$$\varphi = n_i\,du^i, \tag{7a}$$

deren Nullflächen mit den zylindrischen Torsen des Systems zusammenfallen.

Es bleibt noch der Tensor A_{ik}. Man zeigt leicht, daß für Torsenparameter A_{12} und A_{22} verschwinden. Es ist

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{1}{|G_{11}G_{22} - G_{12}^2|^{\frac{1}{2}}} \cdot \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{12}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\boldsymbol{W}; \\ A_{22} &= \frac{1}{|G_{11}G_{22} - G_{12}^2|^{\frac{1}{2}}} \cdot \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{22}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\boldsymbol{W}. \end{aligned} \tag{8}$$

Man formt die Ketten um

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{22}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\boldsymbol{W} = +\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_{22}\,\mathfrak{p}_1\,\boldsymbol{W}.$$

Hier ist es offenbar gleichgültig, ob die kovarianten oder die gewöhnlichen Ableitungen genommen werden, so daß man unmittelbar die Formeln § 1 (1 bis 9) übernehmen kann. Differenziert man $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{22} = 0$, so folgt $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_{22} = 0$, also auch $A_{22} = 0$. Differenziert man ferner $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2 = 0$, so folgt $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{21}$, und daraus

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{12}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_{12}\,\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{21}\,\mathfrak{p}_{12}\,\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{12}\,\mathfrak{p}_{12}\,\boldsymbol{W} = 0.$$

Es ist also auch die Form

$$A_{ik}\,du^i\,du^k$$

eine ausgeartete quadratische Form mit verschwindender Diskriminante

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{12} = 0,$$

und man erhält auch hier durch

$$m_i m_k = A_{ik} \tag{9}$$

die Koeffizienten einer Linearform

$$m_i\,du^i,$$

deren Nullflächen mit den zylindrischen Torsen des Systems zusammenfallen. Die Koeffizienten m_i dieser Linearform werden ebenfalls dann und nur dann gleichzeitig Null, wenn die uneigentliche Kurve des Systems eine Gerade ist.

Jetzt stehen zwei Linearformen zur Verfügung, die sich nicht wesentlich unterscheiden. Sie geben die Möglichkeit, zwei weitere Linearformen zu bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe der quadratischen Grundform $G_{ik}\,du^i du^k$. Bezeichnet man die Koeffizienten der gesuchten Formen mit $\bar{n}_i$ und $\bar{m}_i$, so sollen folgende Definitionsgleichungen gelten

$$(10)\qquad (n_i\,du^i)(\bar{n}_k\,du^k) \equiv \frac{1}{2}\,G_{lm}\,du^l du^m$$

und

$$(11)\qquad (m_i\,du^i)(\bar{m}_k\,du^k) \equiv \frac{1}{2}\,G_{lm}\,du^l du^m.$$

Die Nullflächen der durch diese Gleichungen vollständig bestimmten Formen

$$\bar{n}_1\,du^1 + \bar{n}_2\,du^2; \qquad \bar{m}_1\,du^1 + \bar{m}_2\,du^2$$

sind die nichtzylindrischen Torsen des Systems.

Jetzt können die beiden Linearformen

$$(12)\qquad \varphi = n_1\,du^1 + n_2\,du^2; \qquad \psi = \bar{n}_1\,du^1 + \bar{n}_2\,du^2$$

oder auch

$$(13)\qquad m_1\,du^1 + m_2\,du^2; \qquad \bar{m}_1\,du^1 + \bar{m}_2\,du^2$$

als Grundlage invarianter Ableitungen[7]) verwendet werden. Man definiert, indem man etwa das erste Formenpaar heranzieht, in gewohnter Weise die kontragredienten Größen n^i und $\bar{n}^i$ durch

$$(14)\qquad \begin{aligned} n_i n^i &= 1; \qquad n_i \bar{n}^i = 0, \\ \bar{n}_i n^i &= 0; \qquad \bar{n}_i \bar{n}^i = 1. \end{aligned}$$

Dann versteht man unter den invarianten Ableitungen einer Größe S die Ausdrücke

$$(15)\qquad S_1 = n^i \frac{\partial S}{\partial u^i}; \qquad S_2 = \bar{n}^i \frac{\partial S}{\partial u^i}.$$

Für Torsenparameter war $n_2 = 0$; wegen (10) wird dann $\bar{n}_1 = 0$. Daher liefert (14)

$$(16)\qquad n^1 = \frac{1}{n_1}; \quad n^2 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{n}^1 = 0; \quad \bar{n}^2 = \frac{1}{\bar{n}_2}.$$

In diesem Falle wird also

$$(17)\qquad S_1 = \frac{1}{n_1}\frac{\partial S}{\partial u^1} \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{1}{\bar{n}_2}\frac{\partial S}{\partial u^2}.$$

Daraus erkennt man, daß die Formeln (1) bis (9) des § 1 ungeändert bleiben, wenn man die dort auftretenden gewöhnlichen partiellen Ableitungen als invariante Ableitungen interpretiert. Wir können uns daher den in-

[7]) Vgl. etwa Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, Berlin 1930, § 61 ff.; im folgenden kurz zitiert als Blaschke I; ebenso der zweite Band jenes Werkes als Blaschke II.

varianten Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen zuwenden, die einen Überblick über den Vorrat der Invarianten des Systems geben; dabei sollen kleine angehängte fette Zahlen die invarianten Ableitungen ausdrücken. Die Integrabilitätsbedingung ist bekanntlich für eine invariante Größe S

$$S_{12} + Q S_1 = S_{21} + \bar{Q} S_2 . \tag{18}$$

Hier sind Q und $\bar{Q}$ bestimmt durch die Gleichungen

$$Q = \sum_{i,k} (n^i \bar{n}^k - \bar{n}^i n^k) \frac{\partial n_i}{\partial u^k}; \qquad \bar{Q} = \sum_{i,k} (\bar{n}^i n^k - \bar{n}^k n^i) \frac{\partial \bar{n}_i}{\partial u^k} . \tag{19}$$

Im folgenden entscheiden wir uns, wie schon in den Gleichungen (14) bis (17), für die Linearformen (12). Für Torsenparameter wird dann[8])

$$\begin{aligned} n^1 &= \frac{1}{n_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_{uu}\boldsymbol{W}}}; & n^2 &= 0; \\ \bar{n}^1 &= 0; & \bar{n}^2 &= \frac{1}{\bar{n}_2} = \frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_{uv}\boldsymbol{W}}}{(\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_v)} . \end{aligned} \tag{20}$$

Für die invarianten Ableitungen erhält man[9]):

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{\mathfrak{p}_u}{\sqrt[3]{\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_{uu}\boldsymbol{W}}}; \qquad \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_v \cdot \frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_{uu}\boldsymbol{W}}}{(\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_v)} . \tag{21}$$

Daraus folgt

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) = 1 \tag{22}$$

und wegen § 1 (9)

$$E = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\boldsymbol{x}_2 = -1 . \tag{23}$$

Ferner ergibt sich

$$(\mathfrak{u}\mathfrak{p}_{11}) = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{11}\boldsymbol{W} = -1 , \tag{24}$$

denn es wird

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{11}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_{uu}\boldsymbol{W} \cdot (n^1)^3 = 1 .$$

§ 3.

Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen.

Nachdem im § 1 ein Tetraeder konstruiert wurde, welches bei Verwendung der in § 2 definierten invarianten Ableitungen sowohl affin- als auch parameter-invariant mit der Umgebung des betrachteten Systemstrahles verbunden ist, können die höheren invarianten Ableitungen des Vektors $\mathfrak{p}$ sowie andere Sechservektoren linear aus den Tetraederkanten kombiniert

[8]) Wegen $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2 = 0$ ist $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{11}\boldsymbol{W}$ in kovarianten Ableitungen gleich $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_u\mathfrak{p}_{uu}\boldsymbol{W}$ in gewöhnlichen partiellen Ableitungen.

[9]) Da im folgenden nur invariante Ableitungen auftreten, können diese mit gewöhnlichen kleinen Indizes bezeichnet werden, ohne zu Verwechslungen Anlaß zu geben.

werden. Unter den Ableitungsgleichungen versteht man die Linearkombinationen für die ersten invarianten Ableitungen der Tetraederkanten: $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}; \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$. Ist $\mathfrak{r}$ irgendein Sechservektor und

$$\mathfrak{r} = \alpha\mathfrak{p} + \beta\mathfrak{p}_1 + \gamma\mathfrak{q} + \delta\mathfrak{u} + \varepsilon\mathfrak{v} + \zeta\mathfrak{w} \tag{1}$$

seine Linearkombination, so erhält man nach § 1 Gleichung (7) für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha &= (\mathfrak{r}\mathfrak{w})\frac{1}{E}; \quad \beta = (\mathfrak{r}\mathfrak{v})\frac{1}{E}; \quad \gamma = (\mathfrak{r}\mathfrak{u})\frac{1}{E}; \\ \delta &= (\mathfrak{r}\mathfrak{q})\frac{1}{E}; \quad \varepsilon = (\mathfrak{r}\mathfrak{p}_1)\frac{1}{E}; \quad \zeta = (\mathfrak{r}\mathfrak{p})\frac{1}{E}. \end{aligned} \tag{2}$$

Zur Bestimmung der Linearkombinationen der Ableitungsvektoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_{11}$, $\mathfrak{p}_{12}$, ... benötigt man daher ihre Skalarprodukte mit den Grundvektoren. In der folgenden Tabelle sind diese Skalarprodukte eingetragen. Es wurde zunächst festgestellt, welche der skalaren Produkte verschwinden; für die übrigen wurden zur Abkürzung Buchstaben eingesetzt.

(3)

	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}_1$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{p}_1$	0	0	0	0	E	0
$\mathfrak{p}_2$	0	$-E$	0	0	0	A
$\mathfrak{p}_{11}$	0	0	$-E$	F	G	$-B$
$\mathfrak{p}_{12}$	$+E$	0	0	0	H	$-C$
$\mathfrak{q}_1$	0	$+E$	0	K	0	D
$\mathfrak{q}_2$	0	0	0	L	$-M$	$-N$
$\mathfrak{u}_1$	0	$-F$	$-K$	0	0	0
$\mathfrak{u}_2$	0	0	$-L$	0	0	0
$\mathfrak{v}_1$	$-E$	$-G$	0	0	0	0
$\mathfrak{v}_2$	0	$-H$	$+M$	0	0	0
$\mathfrak{w}_1$	0	$+B$	$-D$	0	0	0
$\mathfrak{w}_2$	$-A$	$+C$	$+N$	0	0	0

Den Formeln (22) bis (24) des § 2 wurde hier nur entnommen, daß E konstant ist. Zwischen den Größen L, A, H und K, G besteht je eine Gleichung, die man folgendermaßen berechnet. Es war

$$\mathfrak{u} = -\|\boldsymbol{W}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1; \boldsymbol{W}\|.$$

Durch invariante Ableitung folgt:

$$\mathfrak{u}_2 = -\|\boldsymbol{W}\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_1; \boldsymbol{W}\| - \|\boldsymbol{W}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_{12}; \boldsymbol{W}\|.$$

Für das Skalarprodukt $(\mathfrak{u}_2\mathfrak{q})$ erhält man daher

$$(\mathfrak{u}_2\mathfrak{q}) = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_{12}\mathfrak{q}\boldsymbol{W}.$$

Infolge der Normierung war aber $\mathfrak{q}\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{x}_2$ (§ 1 Gleichung (4)); also wird

$$(\mathfrak{u}_2\mathfrak{q}) = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_{12}\boldsymbol{x}_2 = (\mathfrak{w}\mathfrak{p}_2) + (\mathfrak{v}\mathfrak{p}_{12})$$

nach § 1 Gleichung (5). Nach der letzten Tabelle ist

$$(\mathfrak{u}_2\mathfrak{q}) = -L; \quad (\mathfrak{w}\mathfrak{p}_2) = A; \quad (\mathfrak{v}\mathfrak{p}_{12}) = H,$$

so daß die letzte Gleichung sich schreiben läßt:

$$-L = A + H. \tag{4}$$

Einfacher findet man die Beziehung zwischen K und G:

$$K = (\mathfrak{q}_1\mathfrak{u}) = -(\mathfrak{u}_1\mathfrak{q}) = +\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_{11}\boldsymbol{x}_2 = -(\mathfrak{v}\mathfrak{p}_{11}).$$

Also ist

$$K = -G. \tag{5}$$

Setzt man für E den Wert -1, so folgen aus der Tabelle bei Verwendung von (1) und (2) die Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{u}_1 &= K\mathfrak{u} + F\mathfrak{v},\\
\mathfrak{p}_2 &= -A\mathfrak{p} - \mathfrak{v}; & \mathfrak{u}_2 &= L\mathfrak{u},\\
\mathfrak{p}_{11} &= B\mathfrak{p} - G\mathfrak{p}_1 - F\mathfrak{q} - \mathfrak{u}; & \mathfrak{v}_1 &= G\mathfrak{v} - \mathfrak{w},\\
\mathfrak{p}_{12} &= C\mathfrak{p} - H\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{w}; & \mathfrak{v}_2 &= -M\mathfrak{u} + H\mathfrak{v},\\
\mathfrak{q}_1 &= -D\mathfrak{q} - K\mathfrak{q} + \mathfrak{v}; & \mathfrak{w}_1 &= D\mathfrak{u} - B\mathfrak{v},\\
\mathfrak{q}_2 &= +N\mathfrak{p} + M\mathfrak{p}_1 - L\mathfrak{q}; & \mathfrak{w}_2 &= -N\mathfrak{u} - C\mathfrak{v} + A\mathfrak{w}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Daraus berechnet man die Integrabilitätsrelationen nach der Grundformel der invarianten Ableitungen, die für eine Größe S lautet:

$$S_{12} + QS_1 = S_{21} + \bar{Q}S_2.$$

Man erhält die zehn Gleichungen

$$\begin{aligned}
-A_1 - \bar{Q}A - C &= 0,\\
-A + H - Q &= 0,\\
+G + \bar{Q} &= 0,\\
+L + H + D + Q &= 0,\\
-L + H + Q &= 0,\\
-L_1 + K_2 - \bar{Q}L + QK - FM &= 0,\\
-M_1 - N + GM - KM - \bar{Q}M &= 0,\\
-D_2 - N_1 - QD - \bar{Q}N + AD - KN - BM - DL &= 0,\\
-H_1 + G_2 - H\bar{Q} + GQ + C + FM &= 0,\\
B_2 - C_1 + QB - \bar{Q}C - AB - CG - FN + BH &= 0.
\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen kommen noch (4) und (5), und aus dem vorigen Paragraphen (22) und (24), also

$$F = -1; \quad K = -G; \quad -L = A + H.$$

Aus allen diesen Gleichungen lassen sich die Beziehungen ableiten

$$\begin{aligned} H &= 0; & G &= -\bar{Q}, \\ F &= -1; & K &= +\bar{Q}, \\ A &= -Q; & D &= -2Q, \\ & & L &= +Q. \end{aligned}$$

Schließlich bleiben folgende Gleichungen:

$$(7) \qquad \boxed{\begin{aligned} C &= Q_1 + Q\bar{Q} \\ M &= Q_1 - \bar{Q}_2 \\ N &= -M_1 - 3M\bar{Q} \\ &= -Q_{11} + \bar{Q}_{21} - 3\bar{Q}(Q_1 - \bar{Q}_2) \\ B &= \tfrac{1}{M}\{2Q_2 + 6Q^2 - N_1 - 2\bar{Q}N\} \end{aligned}}.$$

Und außerdem:

$$(8) \qquad \boxed{B_2 - C_1 + 2QB + N = 0}.$$

Jetzt lassen sich die Ableitungsgleichungen schreiben:

$$(9) \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{u}_1 &= \bar{Q}\mathfrak{u} - \mathfrak{v} \\ \mathfrak{p}_2 &= Q\mathfrak{p} - \mathfrak{v}; & \mathfrak{u}_2 &= Q\mathfrak{u} \\ \mathfrak{p}_{11} &= B\mathfrak{p} + \bar{Q}\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{q} - \mathfrak{u}; & \mathfrak{v}_1 &= -\bar{Q}\mathfrak{v} - \mathfrak{w} \\ \mathfrak{p}_{12} &= C\mathfrak{p} + \mathfrak{w}; & \mathfrak{v}_2 &= -M\mathfrak{u} \\ \mathfrak{q}_1 &= 2Q\mathfrak{p} - \bar{Q}\mathfrak{q} + \mathfrak{v}; & \mathfrak{w}_1 &= -2Q\mathfrak{u} - B\mathfrak{v} \\ \mathfrak{q}_2 &= N\mathfrak{p} + M\mathfrak{p}_1 - Q\mathfrak{q}; & \mathfrak{w}_2 &= -N\mathfrak{u} - C\mathfrak{v} - Q\mathfrak{w} \end{aligned}}.$$

Mit diesen Gleichungen ist der formale Apparat vollendet. Man erkennt, daß sich sämtliche Größen durch die beiden Invarianten Q und $\bar{Q}$ darstellen lassen, und daß außerdem zwischen Q und $\bar{Q}$ noch eine Integrabilitätsbedingung (8) besteht. Das gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß erstens die uneigentliche Kurve des Systems keine Gerade ist und, wie man aus der letzten Gleichung (7) sieht, die Größe M nicht verschwindet und daß zweitens die im Endlichen gelegene Brennfläche nicht in eine Kurve entartet ist. Man kann dann die Sätze formulieren:

Satz 1. *Die zwei Invarianten Q und $\bar{Q}$ bilden mit ihren invarianten Ableitungen ein vollständiges Invariantensystem der zylindrischen Strahlensysteme gegenüber affinen Transformationen, vorausgesetzt, daß $M \neq 0$ und die uneigentliche Kurve des Systems keine Gerade ist.*

Beachtet man die Gleichungen (19) des § 2, dann läßt sich der Satz auch folgendermaßen aussprechen:

Satz 1a. *Ein zylindrisches Strahlensystem, für welches $M \neq 0$ und dessen uneigentliche Kurve keine Gerade ist, wird durch zwei Linearformen $n_i du^i$ und $\bar{n}_i du^i$ vollständig bestimmt bis auf affine Transformationen. Dabei besteht zwischen den Koeffizienten n_i und $\bar{n}_i$ eine Integrabilitätsbedingung.*

Für die geometrischen Anwendungen der Formeln werden die Koordinaten der Eckpunkte des Grundtetraeders gebraucht. Diese sind:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{W}\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}, \\ \boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{W}\mathfrak{p}, \\ \boldsymbol{x}_2 &= \boldsymbol{W}\mathfrak{q}, \\ \boldsymbol{x}_{11} &= \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1. \end{aligned} \tag{10}$$

§ 4.

Geometrische Deutungen.

1. Die Normierung und die Linearform φ. Die Lage der Geraden $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ ist abhängig von der Normierung der homogenen Koordinaten des Systemstrahles $\mathfrak{p}$. Ändert man nämlich die Normierung und setzt etwa $\hat{\mathfrak{p}} = \lambda\mathfrak{p}$, so wird $\hat{\mathfrak{p}}_1 = \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda\mathfrak{p}_1$ und $\hat{\mathfrak{p}}_2 = \lambda_2\mathfrak{p} + \lambda\mathfrak{p}_2$. Man weiß also zunächst nur, daß $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ je in einem Strahlenbüschel liegen [10]). Welches ist nun auf Grund der im § 1 gewählten Normierung die Lage von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$? Hier gilt der

Satz 2. *Die Gerade $\mathfrak{p}_1$ ist die Affin-Hauptnormale derjenigen Kurve der Brennfläche $\boldsymbol{x}$, die von der nichtzylindrischen Torse durch $\mathfrak{p}$ ausgeschnitten wird* (= *Rückkehrkante der Torse*).

Durch die Linearformen φ und ψ wird längs jeder der Torsen ein invarianter Parameter festgelegt, so daß die invarianten Ableitungen längs φ bzw. ψ die Differentialquotienten nach diesem Parameter sind [11]). Wir behaupten nun:

Satz 3. *Die Linearform φ bestimmt die Affin-Bogenlänge der Rückkehrkante der durch $\mathfrak{p}$ gehenden nichtzylindrischen Torse.*

---

[10]) Parab. Strahl.-Syst. § 9, S. 266f.

[11]) Parab. Strahl.-Syst. § 2, S. 247.

Es ist $\mathfrak{x}$ ein Punkt der Kurve, und es wird

$$\mathfrak{x}_1 = W\mathfrak{p}; \quad \mathfrak{x}_{11} = W\mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{x}_{111} = B\,W\mathfrak{p} + \bar{Q}\,W\mathfrak{p}_1 + W\mathfrak{q}.$$

Die Affin-Bogenlänge ist dadurch definiert, daß für die Differentialquotienten nach der Bogenlänge die Determinante $|\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}'''| = 1$ ist. Das gibt in unserem Fall:

$$|\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_{11}\,\mathfrak{x}_{111}| = |\mathfrak{x}, W\mathfrak{p}, W\mathfrak{p}_1, W\mathfrak{q}| = 1, \tag{1}$$

da ja die Determinante des Grundtetraeders gleich eins ist. Daher fällt $\mathfrak{x}_{11} = W\mathfrak{p}_1$ als zweite Ableitung nach der Affin-Bogenlänge [12]) mit dem uneigentlichen Punkt der Affin-Hauptnormalen der betrachteten Brennkurve zusammen, und Satz 2 ist bewiesen.

Um die Lage von $\mathfrak{p}_2$ anzugeben, wird die Brennfläche des konjugierten Systems, das von $\mathfrak{q}$ erzeugt wird, berechnet. Die Torsen dieses Systems werden ebenfalls durch $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ gegeben. Der eine Brennpunkt fällt mit $\mathfrak{x}$ zusammen, den zweiten findet man nach einfacher Rechnung:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{x} - \frac{1}{2Q} W\mathfrak{q}. \tag{2}$$

Diese Gleichung führt zur Bestimmung der Lage von $\mathfrak{p}_2$. Der Schnitt von $\mathfrak{p}_2$ mit der Ebene durch $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}$ ist

$$W\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{x} + \frac{1}{Q} W\mathfrak{q}. \tag{3}$$

Daraus folgt: Die Punkte $\mathfrak{x}$, $W\mathfrak{q}$, der vierte harmonische Punkt von $\mathfrak{q}$ bezüglich $\mathfrak{x}$ und $W\mathfrak{q}$ und der Punkt $W\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}_2$ sind vier harmonische Punkte. Damit ist die Lage von $\mathfrak{p}_2$ interpretiert.

2. Das Verschwinden der Invarianten. Aus der Gleichung (2) ergibt sich unmittelbar der

Satz 4. *Ist in einem zylindrischen Strahlensystem die Invariante $Q \equiv 0$, so ist auch das konjugierte System $\mathfrak{q}$ zylindrisch und die Brennfläche $\mathfrak{x}$ eine Schiebfläche, deren Erzeugende die Brennkurven sind.*

Durch invariante Ableitung erhält man aus (2)

$$\mathfrak{q}_1 = \frac{C}{2Q^2} W\mathfrak{q}; \quad \mathfrak{q}_2 = \frac{1}{2Q^2}\{(3Q^2 + Q_2) W\mathfrak{q} - QN W\mathfrak{p} - QM W\mathfrak{p}_1\}. \tag{4}$$

Daraus folgt

Satz 5. *Ist $C \equiv 0$, so artet die Brennfläche $\mathfrak{q}$ des Systems $\mathfrak{q}$ in eine Kurve aus.*

Satz 6. *Ist $N \equiv 0$, so enthält die Brennebene durch $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_2$ des Systems $\mathfrak{q}$ die Gerade $\mathfrak{p}_1$; sie fällt also mit einer Ebene des Grundtetraeders zusammen.*

[12]) Blaschke II, S. 72f.

Sind α und $\bar{\alpha}$ zwei Funktionen der Parameter u, v, so wird durch

$$\alpha\varphi + \bar{\alpha}\psi = 0 \tag{5}$$

eine Schar geradliniger Flächen im Strahlensystem bestimmt, die aus der Brennfläche $\mathfrak{x}$ eine Kurvenschar ausschneiden. Die Größen α und α sollen so bestimmt werden, daß diese Kurven Asymptotenlinien der Brennfläche sind. Bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_\alpha &= \bar{\alpha}\,\mathfrak{x}_1 - \alpha\,\mathfrak{x}_2, \\ \mathfrak{x}_{\alpha\alpha} &= \bar{\alpha}_\alpha\,\mathfrak{x}_1 - \alpha_\alpha\,\mathfrak{x}_2 + \bar{\alpha}^2\,\mathfrak{x}_{11} - \alpha\,\bar{\alpha}\,(\mathfrak{x}_{12} + \mathfrak{x}_{21}) + \alpha^2\,\mathfrak{x}_{22} \end{aligned} \tag{6}$$

die invarianten Ableitungen von $\mathfrak{x}$ nach der durch $\mathfrak{x}$ gehenden Kurve der Schar (5), so muß für die Asymptotenlinien gelten

$$|\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_{\alpha\alpha}| = 0.$$

Daraus folgt für α und $\bar{\alpha}$ die Gleichung

$$\bar{\alpha}^2 + M\alpha^2 = 0. \tag{7}$$

Die beiden Scharen der Asymptotenlinien fallen zusammen, wenn $M = 0$ ist. Daher gilt der

Satz 7. *Ist $M \equiv 0$, so ist die Brennfläche $\mathfrak{x}$ eine Torse.*

Der Vektor $\mathfrak{p}_1$ beschreibt ein Strahlensystem, dessen geometrische Deutung durch Satz 2 gegeben ist. Die Mittenfläche dieses Systems wird durch den Vierervektor dargestellt:

$$W\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_{11}\,\mathfrak{p}_{12} - W\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_{12}\,\mathfrak{p}_{11} = 2\,C\mathfrak{x} + B\,W\mathfrak{p}_1.$$

Aus dieser Formel folgen die Sätze

Satz 8. *Ist $C \equiv 0$, dann ist das System $\mathfrak{p}_1$ zylindrisch.*

Satz 9. *Ist $B \equiv 0$, dann ist die Brennfläche $\mathfrak{x}$ des Systems $\mathfrak{p}$ zugleich Mittenfläche des Systems $\mathfrak{p}_1$.*

Als Abschluß dieses Paragraphen beweisen wir den

Satz 10. *Ein zylindrisches Strahlensystem, dessen Brennfläche keine Kurve und dessen uneigentliche Kurve keine Gerade ist, liegt dann und nur dann in einem linearen Komplex, wenn seine Brennfläche eine Torse ist.*

Der Beweis des Satzes folgt sofort aus der Berechnung der Determinante

$$|\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_{11}\,\mathfrak{p}_{12}\,\mathfrak{p}_{22}|,$$

die nur für $M = 0$ verschwindet.

§ 5.

Der Krümmungskegel.

Es sei durch die Gleichung

$$\alpha\varphi + \bar{\alpha}\psi = 0 \tag{1}$$

eine einparametrische Schar geradliniger Flächen im Strahlensystem bestimmt. In der Umgebung von $\mathfrak{p}$ nehmen wir drei infinitesimal-benachbarte Strahlen der durch $\mathfrak{p}$ gehenden Regelfläche aus der Schar (1). Diese bestimmen eine Fläche zweiten Grades, die Schmieg-F_2 einer solchen Regelfläche, deren Mittelpunkt $\boldsymbol{m}$ sei. Wird nun die Gesamtheit der Flächen zweiter Ordnung betrachtet, die auf diese Weise durch je drei infinitesimalbenachbarte Systemstrahlen von $\mathfrak{p}$ gelegt werden können, so gilt

Satz 11. *Die Mittelpunkte $\boldsymbol{m}$ dieser ∞^2 Flächen zweiter Ordnung liegen sämtlich in derjenigen Brennebene durch $\mathfrak{p}$, die die uneigentliche Kurve des Systems berührt.*

Und ferner der

Satz 12. *Die Mittelpunkte der Schmieg-F_2 aller Regelflächen des Systems $\mathfrak{p}$, die durch dasselbe Paar konsekutiver Strahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}+d\mathfrak{p}$ hindurchgehen, sich also sämtlich längs $\mathfrak{p}$ berühren, liegen auf einer zum Strahl $\mathfrak{p}$ parallelen Geraden.*

Der letzte Satz ist ein Analogon zum *Satz von Meusnier* der elementaren Flächentheorie. Jeder Fortschreitungsrichtung im System vom Strahl $\mathfrak{p}$ aus wird eine zu $\mathfrak{p}$ parallele Gerade zugeordnet. Die entsprechende Untersuchung für allgemeine Strahlensysteme ergab als Ort der Mittelpunkte $\boldsymbol{m}$ den rationalen kubischen Krümmungskegel[13]). Dieser zerfiel für parabolische Strahlensysteme in einen quadratischen Kegel mit einer berührenden Ebene[14]), während er hier in eine dreifach zu zählende Ebene ausartet.

Der Beweis der Sätze 11 und 12 bereitet keine Schwierigkeiten. Sind $\mathfrak{p}_\alpha$, $\mathfrak{p}_{\alpha\alpha}$ die invarianten Ableitungen von $\mathfrak{p}$ nach der Linearform (1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\alpha &= \bar{\alpha}\,\mathfrak{p}_1 - \alpha\,\mathfrak{p}_2, \\ \mathfrak{p}_{\alpha\alpha} &= \bar{\alpha}_\alpha\,\mathfrak{p}_1 - \alpha_\alpha\,\mathfrak{p}_2 + \bar{\alpha}^2\,\mathfrak{p}_{11} - \alpha\,\bar{\alpha}\,(\mathfrak{p}_{12}+\mathfrak{p}_{21}) + \alpha^2\,\mathfrak{p}_{22}; \end{aligned} \tag{2}$$

dann werden die Koordinaten des Mittelpunktes $\boldsymbol{m}$ gegeben durch[15])

$$\boldsymbol{m} = W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_\alpha\,\mathfrak{p}_{\alpha\alpha} - W\mathfrak{p}_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{p}_\alpha\,\mathfrak{p}. \tag{3}$$

Aus den Ableitungsgleichungen findet man

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{21} &= Q_1\,\mathfrak{p} + Q\,\mathfrak{p}_1 + \bar{Q}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{w}, \\ \mathfrak{p}_{22} &= (Q_2 + Q^2)\,\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - Q\,\mathfrak{v}. \end{aligned} \tag{4}$$

Außerdem ist nach § 1:

$$W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{v} = +W\mathfrak{p}; \qquad W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{u} = 0; \qquad W\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{w} = -W\mathfrak{p}_1. \tag{5}$$

[13]) Strahl.-Syst. II, S. 332f.
[14]) Parab. Strahl.-Syst., S. 260f.
[15]) Parab. Strahl.-Syst., S. 240 und 261.

Eine einfache kurze Rechnung ergibt dann für den Mittelpunkt

$$\boldsymbol{m} = 2(\bar{\alpha}^3 \boldsymbol{x} + \bar{\alpha}^2 \alpha \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1) + (\bar{\alpha}\alpha_\alpha - \alpha\bar{\alpha}_\alpha)\boldsymbol{W}\mathfrak{p}. \tag{6}$$

Setzt man hier $\bar{\alpha} : \alpha = \nu$ und $(\bar{\alpha}\alpha_\alpha - \alpha\bar{\alpha}_\alpha) : \alpha^3 = \mu$, so wird

$$\boldsymbol{m} = 2\nu^2(\nu \boldsymbol{x} + \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1) + \mu \boldsymbol{W}\mathfrak{p}. \tag{7}$$

Bei veränderlichem ν und μ erfüllt $\boldsymbol{m}$ die durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ gehende Ebene. Damit ist Satz 11 bewiesen. Hält man dagegen ν fest und verändert μ, so durchläuft $\boldsymbol{m}$ eine zu $\mathfrak{p}$ parallele Gerade. Dies bestätigt den Satz 12.

§ 6.

Die uneigentliche Kurve des Systems.

In der Einleitung wurde schon die Bedeutung der uneigentlichen Kurve des Strahlensystems hervorgehoben und darauf hingewiesen, daß die Differentialgeometrie der zylindrischen Strahlensysteme als eine Verallgemeinerung der elementaren Flächentheorie angesehen werden kann. Der absolute Kegelschnitt, dessen Invarianz die Bewegungsgruppe als Untergruppe allgemeiner projektiver Tansformationen kennzeichnet, wird durch eine beliebige ebene Kurve ersetzt, nämlich durch die uneigentliche Kurve des Systems. Wir betrachten die Umgebung des Systemstrahles $\mathfrak{p}$. $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$ ist ein Punkt der Kurve. Offenbar verdient der Schmiegkegelschnitt der Kurve im Punkte $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$ besonderes Interesse; er wird eine gewisse Vermittlerstellung zwischen der elementaren Flächentheorie und der Differentialgeometrie der zylindrischen Strahlensysteme einnehmen. Hier soll lediglich die Gleichung des Schmiegkegelschnittes aufgestellt und mit ihrer Hilfe das Verschwinden der Invariante $\bar{Q}$ gedeutet werden. Die durch $\mathfrak{p}$ gehende nichtzylindrische Torse des Systems schneidet $\boldsymbol{W}$ in der uneigentlichen Systemkurve. Die Linearform φ bestimmt nach § 4 die Affin-Bogenlänge der Rückkehrkante dieser Torse. Nehmen wir den Vektor $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$ als Funktion der Affin-Bogenlänge s an, so können seine Komponenten in Taylorsche Reihen entwickelt werden. Die Differentialquotienten nach s fallen mit den invarianten Ableitungen nach φ zusammen. Man berechnet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{11} &= B\boldsymbol{W}\mathfrak{p} + \bar{Q}\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1 + \boldsymbol{W}\mathfrak{q}, \\ \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{111} &= h\boldsymbol{W}\mathfrak{p} + k\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1, \\ \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_{1111} &= (h_1 + kB)\boldsymbol{W}\mathfrak{p} + (h + k_1 + k\bar{Q})\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1 + k\boldsymbol{W}\mathfrak{q}, \end{aligned} \tag{1}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$h = B_1 + \bar{Q}B + 2Q; \qquad k = \bar{Q}_1 + B + \bar{Q}^2. \tag{2}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung gehen wir zu homogenen Punktkoordinaten $\xi; \eta; \zeta$ in der uneigentlichen Ebene über, die auf die uneigent-

lichen Tetraederpunkte $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$; $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1$; $\boldsymbol{W}\mathfrak{q}$ als Fundamentalpunkte bezogen sind, und setzen für die Koordinaten dieser Punkte (an der betrachteten Stelle des Systems):

$$(3)\qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{p}=\begin{cases}\xi=1\\ \eta=0\\ \zeta=0\end{cases};\qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1=\begin{cases}\xi=0\\ \eta=1\\ \zeta=0\end{cases};\qquad \boldsymbol{W}\mathfrak{q}=\begin{cases}\xi=0\\ \eta=0\\ \zeta=1\end{cases}.$$

Die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}$, als Funktionen des Parameter s geben dann folgende Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}\xi &= 1+0+\frac{1}{2}s^2B+\frac{1}{6}s^3h+\frac{1}{4!}s^4(h_1+kB)+\dots\\ (4)\quad \eta &= \quad s+\frac{1}{2}s^2\bar{Q}+\frac{1}{6}s^3k+\frac{1}{4!}s^4(h+k_1+k\bar{Q})+\dots\\ \zeta &= \quad \frac{1}{2}s^2 \qquad\qquad +\frac{1}{4!}s^4k \qquad\qquad +\frac{1}{5!}s^5(h+2k_1).\end{aligned}$$

Der Schmiegkegelschnitt, bezogen auf das Fundamentaldreieck hat eine Gleichung der Form

$$(5)\qquad a_{22}\eta^2+2a_{23}\eta\zeta+2a_{13}\xi\zeta+a_{33}\zeta^2=0.$$

Zur weiteren Berechnung werden die Anfänge der Reihen von ξ; η; ζ in diese Gleichung eingesetzt. Dann ordnet man nach Potenzen von s und setzt die Koeffizienten der ersten vier Potenzen gleich Null. So erhält man als Gleichung des Schmiegkegelschnittes der uneigentlichen Systemkurve:

$$(6)\qquad \eta^2-2\bar{Q}\eta\zeta-2\xi\zeta+(\bar{Q}^2+2B-k)\zeta^2=0.$$

Soll die uneigentliche Kurve in höherer Ordnung von dem Kegelschnitt berührt werden, so muß auch der Koeffizient von s^5 in der Entwicklung von (5) verschwinden. Das führt auf die Gleichung:

$$(7)\qquad k_1-2h=0$$

oder

$$(7\,\mathrm{a})\qquad (B-\bar{Q}_1)_1+2\bar{Q}(B-\bar{Q}_1)+2Q=0.$$

Diese Gleichung enthält folgenden

Satz 13. *Ist in einem zylindrischen Strahlensystem*

$$k_1-2h\equiv 0,$$

dann ist die uneigentliche Kurve des Systems ein Kegelschnitt.

Es sei ξ_0; η_0; ζ_0 irgendein Punkt der uneigentlichen Ebene. Seine Polare bezüglich des Schmiegkegelschnittes (6) hat die Gleichung:

$$(8)\qquad \zeta_0\xi+\eta(\bar{Q}\zeta_0-\eta_0)+\zeta[\xi_0+\bar{Q}\eta_0-(\bar{Q}^2+2B-k)\zeta_0]=0.$$

Die Polare des Punktes $\boldsymbol{W}\mathfrak{p}_1$ wird daher

$$(9)\qquad \eta-\bar{Q}\zeta=0.$$

Es ist aber nach (3) $\eta = 0$ die Gleichung der uneigentlichen Geraden der Brennfläche x. Man folgert also aus (9) den

Satz 14. *Ist in einem zylindrischen Strahlensystem*

$$\bar{Q} \equiv 0,$$

dann ist der uneigentliche Punkt $W\mathfrak{p}_1$ *der Pol der uneigentlichen Geraden der Tangentialebene der Brennfläche* x *bezüglich des Schmiegkegelschnittes der uneigentlichen Kurve des Systems.*

Beachtet man, daß $\mathfrak{p}_1$ die Affin-Hauptnormale der Rückkehrkante der nichtzylindrischen Torse ist, und daß die Polare der Tangentenebene bezüglich des Schmiegkegelschnittes als Verallgemeinerung der elementaren Flächennormalen in x angesehen werden kann, so zeigen im Falle $\bar{Q} = 0$ die Rückkehrkanten der nichtzylindrischen Torsen eine Analogie zu den elementaren geodätischen Linien der Brennfläche x.

§ 7.

Systeme mit verschwindenden Invarianten.

Nachdem der letzte Satz noch eine Kennzeichnung der Systeme mit verschwindender Invariante $\bar{Q}$ ergeben hat, wenden wir uns zur Untersuchung spezieller Systeme und beginnen mit den einfachsten, für welche die Invarianten Q und $\bar{Q}$ identisch Null sind. Aus den Integrabilitätsbedingungen (§ 3, Gleichung (7) und (8)) folgt sofort

$$C \equiv 0, \quad M \equiv 0, \quad N = 0.$$

Dagegen läßt sich über B nur aussagen:

$$B_2 = 0.$$

Wir machen hier die Annahme, daß auch $B \equiv 0$ ist, dann wird nach[16]) Satz 13 die uneigentliche Brennkurve ein Kegelschnitt und nach Satz 4 und 7 die Brennfläche x ein Zylinder. Die zylindrischen Torsen sind die Tangentenebenen des Zylinders. Die nichtzylindrischen Torsen sind Tangentenflächen kubischer Parabeln, die auf dem Zylinder liegen. Denn wegen $h = 0$ und $k = 0$ verschwinden die Affin-Krümmungen der Rückkehrkanten der nichtzylindrischen Torsen[17]). Die Erzeugenden des Zylinders sind die Geraden des Systems $\mathfrak{q}$, das also hier nur ∞^1 Strahlen enthält. Der uneigentliche Punkt $W\mathfrak{q}$ des Zylinders liegt nach Gleichung (6) des vorigen Paragraphen auf dem uneigentlichen Kegelschnitt des Systems. Außerdem erkennt man, daß der Zylinder quadratisch ist. Durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ wird die Schmiegebene der durch x gehenden kubischen Parabel aufgespannt. Pro-

[16]) Vgl. § 9.
[17]) Vgl. § 8.

jiziert man jetzt vom uneigentlichen Punkt $\boldsymbol{W}\mathfrak{q}$ des Zylinders aus die kubische Parabel auf diese Ebene, so ist die Projektion ein Kegelschnitt. Zusammenfassend formulieren wir

Satz 15. *Es sei ein quadratischer Zylinder und durch seinen uneigentlichen Punkt ein beliebiger Kegelschnitt gegeben, dann bildet die Gesamtheit der Tangenten, die von den Punkten des Kegelschnittes an den Zylinder gelegt werden können, das allgemeinste zylindrische Strahlensystem, dessen sämtliche affinen Invarianten verschwinden.*

§ 8.

Systeme mit konstanten Invarianten.

Anziehender als die einfachsten Systeme des vorigen Paragraphen sind die Systeme mit festen Invarianten. Da mit $Q =$ konst. und $\bar{Q} =$ konst. nach den Ableitungsgleichungen $M = 0$ ist, wird die Invariante B unabhängig von Q und $\bar{Q}$. Es ist daher anzusetzen

$$B = \text{konst.}$$

Aus den Integrabilitätsbedingungen folgt jetzt $M = 0$, $N = 0$ und, damit B einen endlichen Wert annehmen kann, $Q = 0$ und daraus $C = 0$. Aus den Sätzen 4 und 7 erkennt man unmittelbar, daß die Brennfläche ein Zylinder ist, dessen Erzeugenden die Geraden $\mathfrak{q}$ sind. Wir betrachten die auf dem Zylinder liegende Rückkehrkante der nichtzylindrischen Torse durch den Strahl $\mathfrak{p}$. Diese Kurve durchläuft der Punkt $\boldsymbol{x}$, wenn man längs der Linearform φ fortschreitet. Die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{x}$ genügen nach § 6 Gleichung (1) bei Beachtung der Normierung $\boldsymbol{W}\mathfrak{p} = \boldsymbol{x}_1$ der Differentialgleichung

$$\boldsymbol{x}_{1111} - k\,\boldsymbol{x}_{11} - h\,\boldsymbol{x}_1 = 0, \tag{1}$$

wo die Indizes die Ableitungen nach der Affin-Bogenlänge angeben (§ 4). Dabei ist

$$k = \bar{Q}^2 + B; \qquad h = \bar{Q}\,B. \tag{2}$$

Ein Vergleich mit der affinen Kurventheorie[18]) zeigt, daß $-k$ und $-h$ mit der Affin-Krümmung und Affin-Windung der Kurve übereinstimmen. Die zylindrischen Systeme mit festen Invarianten entstehen also dadurch, daß man eine Raumkurve mit festen Affin-Krümmungen auf einem ausgezeichneten Zylinder parallel verschiebt und dann sämtliche Tangenten dieser Kurven konstruiert. Diese Erzeugung läßt sich noch genauer fassen. Ist $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\mathfrak{p}$ der Tangentenvektor der Kurve, so gilt für seine Komponenten wegen (1)

$$\boldsymbol{y}''' - k\,\boldsymbol{y}' - h\,\boldsymbol{y} = 0. \tag{3}$$

[18]) Blaschke II, § 31.

Diese lineare Differentialgleichung hat Lösungen der Form $e^{\lambda s}$, wo λ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 - k\lambda - h = 0 \tag{4}$$

ist. Die Wurzeln lassen sich leicht durch die Größen $\bar{Q}$ und B ausdrücken. Eliminiert man nämlich aus den Gleichungen (2) die Invariante B, so folgt

$$\bar{Q}^3 - k\bar{Q} + h = 0. \tag{5}$$

Addiert man diese Gleichung zu (4), dann wird

$$(\lambda^3 + \bar{Q}^3) - k(\lambda + \bar{Q}) = 0,$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\bar{Q}, \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\bar{Q} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\bar{Q}^2 + 4B}, \\ \lambda_3 &= \tfrac{1}{2}\bar{Q} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\bar{Q}^2 + 4B}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ seien voneinander und von Null verschieden. Dann kann man der Kurve x die Parameterdarstellung geben[19]):

$$\boldsymbol{x} = \begin{cases} a\,e^{\lambda_3 s} = x, \\ b\,e^{\lambda_2 s} = y, \\ c\,e^{\lambda_1 s} = z. \end{cases} \tag{7}$$

Nach Gleichung (3) ist $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Die Kurve (7) liegt deshalb auf der Fläche

$$x \cdot y \cdot z = a \cdot b \cdot c, \tag{8}$$

wenn x, y, z inhomogene Parallelkoordinaten sind.

Nach § 6 Gleichung (1) ist

$$\boldsymbol{W}\mathfrak{q} = \boldsymbol{x}''' - \bar{Q}\,\boldsymbol{x}'' - B\,\boldsymbol{x}'. \tag{9}$$

Daraus bestimmt man den uneigentlichen Punkt des Zylinders, auf dem die Kurve (7) parallel zu sich verschoben werden soll. Setzt man in (9) die Werte aus (7) ein, so ergibt sich, daß $\boldsymbol{W}\mathfrak{q}$ mit dem uneigentlichen Punkt der z-Achse zusammenfällt. Legt man durch die Kurve (7) einen Zylinder, dessen Erzeugenden zur z-Achse parallel sind, so hat dieser die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\lambda_3}.$$

---

[19]) Die vierte Komponente von $\boldsymbol{x}$ ist infolge der Normierung stets gleich Eins. Die ersten drei Komponenten sind daher kartesische Parallelkoordinaten.

Die Systeme mit festen Invarianten genügen daher dem

Satz 16. *Schneidet man den Zylinder*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda_2} - \left(\frac{y}{b}\right)^{\lambda_3} = 0$$

mit der Fläche $x\,y\,z = a \cdot b \cdot c$, *und zieht man auf dem Zylinder die Parallelkurven zu dieser Schnittkurve, dann bildet die Gesamtheit der Tangenten an all diese Kurven ein zylindrisches System mit festen Invarianten.*

Von Interesse ist noch der Fall $\bar{Q} = -\lambda_1 = 0$. Hier erhält man, wenn man etwa $B < 0$ annimmt, statt (7) die Parameterdarstellung

$$(10) \qquad x = a \sin \sqrt{-B} \cdot s; \qquad y = b \cos \sqrt{-B} \cdot s; \qquad z = c\,s.$$

Dies ist eine affine Verallgemeinerung der zylindrischen Schraubenlinien. Durch Parallelverschiebung erhält man auf dem Zylinder

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

eine Schar von Schraubenlinien, deren Tangentengesamtheit das zylindrische System ist[20]).

§ 9.

Systeme mit $Q \equiv \bar{Q} \equiv 0$ und $B \neq 0$.

Mit den Ergebnissen der letzten beiden Paragraphen ist die Affingeometrie der zylindrischen Strahlensysteme zu einem natürlichen Abschluß gelangt. Der formale Teil gipfelte in dem Hauptsatz (§ 3), der geometrische Teil untersuchte die Bedeutung der Invarianten für die Struktur des Systems und gab eine Konstruktion derjenigen Systeme, die durch eine zweiparametrische Gruppe transitiver affiner Transformationen erzeugt werden können. Aus den Integrabilitätsbedingungen ist ersichtlich, daß im allgemeinen die Größe B durch Q, $\bar{Q}$ und deren invariante Ableitungen ausgedrückt werden kann; nämlich wenn die Brennfläche keine Torse ist. Wegen dieser Sonderstellung gewinnt die Invariante B an Interesse. Es liegt nahe, nach denjenigen Systemen zu fragen, in denen zwar Q und $\bar{Q}$ verschwinden, nicht aber B. Nach § 6 wird dann

$$C = 0; \qquad M = 0; \qquad N = 0; \qquad B_2 = 0.$$

Daraus folgt sofort: Die Brennfläche des Systems ist ein Zylinder. Die Systemstrahlen sind die Tangenten an eine Schar von Parallelkurven dieses Zylinders. Man hat also nur noch eine der Parallelkurven und die Lage

[20]) Eine ausführliche Untersuchung der Kurven mit festen Affin-Krümmungen findet man bei Blaschke II, § 31. Hier galt es hauptsächlich die Gleichungen (6) aufzustellen und die Richtung des Zylinders zu bestimmen.

des Zylinders zu dieser Kurve zu bestimmen. Die beiden Affin-Krümmungen dieser Kurve werden hier (§ 6 Gleichung (2))

$$h = B_1; \qquad k = B,$$

so daß gilt:

$$k_1 - h = 0. \tag{1}$$

Die Kurven, zwischen deren Affin-Krümmungen die Beziehung (1) besteht, waren schon mehrfach Gegenstand mathematischer Untersuchungen[21]). Sie haben die Eigenschaft, daß ihre Tangenten einem linearen Geradenkomplex angehören, und sind bekannt unter dem Namen Gewindekurven. Man bestätigt durch eine einfache Rechnung, daß die Determinante

$$|\mathfrak{p}\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_{11}\ \mathfrak{p}_{111}\ \mathfrak{p}_{1111}\ \mathfrak{p}_{11111}|$$

verschwindet, wenn $Q = \bar{Q} = 0$ ist (vgl. auch Satz 10). Es sei $\mathfrak{r}$ der lineare Komplex, der von den Tangenten der Gewindekurve bestimmt wird. Bezieht man $\mathfrak{r}$ auf das Grundtetraeder, so muß $\mathfrak{r}$ in der Form darstellbar sein

$$\mathfrak{r} = \alpha_1 \mathfrak{p} + \alpha_2 \mathfrak{p}_1 + \alpha_3 \mathfrak{q} + \alpha_4 \mathfrak{u} + \alpha_5 \mathfrak{v} + \alpha_6 \mathfrak{w}.$$

Hier sind $\alpha_1 \dots \alpha_6$ so zu berechnen, daß die Skalarprodukte

$$\mathfrak{r}\mathfrak{p};\quad \mathfrak{r}\mathfrak{p}_1;\quad \mathfrak{r}\mathfrak{p}_{11};\quad \mathfrak{r}\mathfrak{p}_{111};\quad \mathfrak{r}\mathfrak{p}_{1111}$$

sämtlich Null werden. Man erhält für den Tangentenkomplex der Gewindekurve

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{q} + \mathfrak{u}.$$

Der Pol des Komplexes in der uneigentlichen Ebene ist

$$W\mathfrak{r} = W\mathfrak{q}.$$

Dieser Punkt gibt die Richtung der Zylindererzeugenden. Es gilt also

Satz 17. *Jedes zylindrische System, in dem Q und $\bar{Q}$ verschwinden, dagegen B nicht Null ist, gestattet folgende Konstruktion: Man verbindet die Punkte einer Gewindekurve mit dem uneigentlichen Pol des zur Gewindekurve gehörenden linearen Komplexes. Auf dem so entstandenen Zylinder konstruiert man die Parallelkurven der Gewindekurve. Das Tangentensystem dieser Kurvenschar ist das gesuchte zylindrische Strahlensystem.*

[21]) Vgl. etwa Blaschke II, § 33.

(Eingegangen am 3. August 1931.)

Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper.

Rochesche Satelliten und ringförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Zentralkörper.*)

Von

Viktor Garten in Leipzig.

Einleitung.

Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts wurde Roche[1]) durch Annäherungsrechnungen zu folgendem Resultat geführt. Ein unendlich kleiner Mondkörper rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen festen Zentralkörper von kugelähnlicher Gestalt derart, daß er diesem stets dieselbe Seite zukehrt. Die Mondmasse als flüssig angenommen, befindet sich das erwähnte System (auf ein mitrotierendes Achsenkreuz bezogen) im Gleichgewicht, wenn der Mond die Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoids besitzt, dessen längste Achse auf das Attraktionszentrum hin gerichtet ist, und dessen kürzeste in die Richtung der Rotationsachse fällt. Darüber hinaus gelang es Roche, zu zeigen, daß man bei variabler Winkelgeschwindigkeit zwei Reihen von Gleichgewichtsfiguren erhält, die folgendermaßen beschaffen sind. Für sehr kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit hat das Ellipsoid nahezu die Gestalt einer Kugel oder einer unendlich dünnen Nadel — die Entfernung des Mondes vom Zentralkörper ist sehr groß. Mit dem Anwachsen der Winkelgeschwindigkeit — dem eine sukzessive Abnahme der Entfernung entspricht — werden die anfangs kugelförmigen Ellipsoide immer stärker, die anfangs nadelförmigen immer weniger abgeplattet, bis sich beide Reihen in einer Figur vereinigen, die dem Maximum der Winkelgeschwindigkeit und damit zugleich dem Minimum des Abstandes vom Zentralkörper entspricht.

---

*) Als Inaugural-Dissertation von der math.-naturw. Abt. der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig angenommen.

[1]) Vgl. die unter [25]) angeführten Abhandlungen von É. Roche.

Erst im Anschluß an die Poincarésche Theorie hat Schwarzschild [2]) eine Verschärfung der Methoden und eine Behandlung des erwähnten Problems im Rahmen einer allgemeinen Theorie angestrebt. Seine Untersuchungen leitete vor allem das Interesse für den Stabilitätscharakter der Figuren, und er konnte sein Resultat dahingehend aussprechen: „Von den Rocheschen Ellipsoiden ist die Reihe der weniger abgeplatteten stabil, die Reihe der stärker abgeplatteten instabil. An die Rocheschen Ellipsoide schließen sich keine andern stabilen Gleichgewichtsfiguren an; an die weniger abgeplatteten und die dem Grenzellipsoid benachbarten stärker abgeplatteten Ellipsoide schließen sich überhaupt keine anderen Gleichgewichtsfiguren an. ... In der Reihe der stärker abgeplatteten Ellipsoide können nun vielleicht auch andere Stabilitätskoeffizienten verschwinden und zu Verzweigungen Anlaß geben." Doch verzichtet er auf diese Untersuchung, da sie die Kenntnis der Glieder von mindestens zweiter Ordnung erfordern würde.

In seinen bekannten Abhandlungen [3]), die hinsichtlich ihrer Strenge restlos befriedigen, gelang Liapounoff neben dem exakten Konvergenzbeweis sogar die vollständige Diskussion der Verzweigungsgleichungen. Seine Untersuchungen beziehen sich auf die Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide und berühren das Rochesche Problem nicht. Sie sind wesentlich analytischen Charakters und bedingen umständliche, oft etwas unübersichtliche Rechnungen.

In neuerer Zeit hat Herr Lichtenstein in Erweiterung der Untersuchungen von Liapounoff, unter Heranziehung neuerer Methoden der Analysis, insbesondere der Theorie linearer Integralgleichungen, zu der Theorie der Gleichgewichtsfiguren einen wesentlich bequemeren Zugang eröffnet (vgl. loc. cit. [7])). Es handelt sich dort vor allem um die Bestimmung neuer Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft *beliebiger* als bekannt vorausgesetzter Gleichgewichtsfiguren für wenig veränderte Werte der Winkelgeschwindigkeit. Im folgenden werden wir die Tatsache benutzen, daß die von Herrn Lichtenstein entwickelte Methode sich auch in dem Fall mit Erfolg durchführen läßt, wo die zugrunde gelegte Figur eine Gleichgewichts-

---

[2]) Vgl. loc. cit. [40]).

[3]) Es sind dies vor allem: Liapounoff, Sur un problème de Tschébycheff, Mém. de l'acad. des sciences de Pétersbourg **17** (8. Reihe), Nr. 3 (1905), S. 1—31. Ferner: Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogène ... Ière partie, Étude générale du problème (1906), IIième partie, Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Maclaurin (1909); IIIième partie, Figures d'équilibre dérivées des ellipsoides de Jacobi (1912) ebenda.

Es sei darauf hingewiesen, daß die (in russischer Sprache abgefaßte) Liapounoffsche Dissertation, in der ebenfalls nur eine erste Näherung angestrebt wurde, noch vor der Poincaréschen Abhandlung veröffentlicht wurde. (Eine französische Übersetzung erschien 1904 in den Annales de Toulouse.)

figur nur in einer ersten Näherung darstellt. Dieser Umstand bildete bereits die Grundlage für die in der Fußnote [5]) angeführten Untersuchungen von Herrn Lichtenstein über die Laplacesche Theorie des Erdmondes, über eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur und über ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper.

Die vorliegende Arbeit ist in Ausführung eines von Herrn Lichtenstein in seiner Vorlesung über „Kosmogonische Hypothesen“ (Wintersemester 1928/29) entwickelten Programms aus der Beschäftigung mit dem Rocheschen Problem entstanden. Doch wurde die Fragestellung mehrfach modifiziert. In dem ersten Teil wird das Problem sinngemäß in die Ebene übertragen, um besonders die Verhältnisse an den singulären Stellen übersichtlicher zu gestalten. Freilich hat hier selbst die Heranziehung der Glieder zweiter Ordnung in diesem einfacheren Falle die Verzweigungsfrage noch nicht restlos zu beantworten vermocht. Als völlig erledigt kann hier wie im räumlichen Fall neben dem Existenzbeweis der regulären Figuren und derjenigen, die dem Maximum der Winkelgeschwindigkeit entspricht, die Existenz der beiden linearen Reihen von Gleichgewichtsfiguren nur bis zu der Figur gelten, bei der nach Schwarzschild die Instabilität beginnt. Zwischen den weiteren singulären Stellen schließen sich die regulären Figuren „streckenweise“ zu linearen Reihen zusammen. Der zweite Teil ist dem räumlichen Fall, dem eigentlichen Rocheschen Problem, gewidmet und enthält analoge Ergebnisse. In dem dritten Teil endlich tritt an Stelle des Rocheschen Satelliten ein ringförmiger Flüssigkeitskörper von nahezu elliptischem Querschnitt. Es wird zunächst durch Näherungsrechnungen die Winkelgeschwindigkeit und das Achsenverhältnis der Ausgangsfigur, eines Ringkörpers von genau elliptischem Querschnitt, so bestimmt, daß dieser bei Vorhandensein der als punktförmig angenommenen Zentralmasse näherungsweise eine Gleichgewichtsfigur darstellt. Wir setzen dabei das Verhältnis der großen Halbachse (die wie im Rocheschen Fall auf den Zentralkörper hin gerichtet ist) des elliptischen Querschnittes zu dem Abstand von der Zentralmasse als klein voraus. Der Übergang zu der effektiven Gleichgewichtsfigur erfolgt wie in den beiden früheren Teilen. Die Ausführungen dieses letzten Teiles lehnen sich naturgemäß sehr eng an die Untersuchungen von Herrn Lichtenstein über ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper [4]) an. Die Ergebnisse sind den bereits genannten des ersten und zweiten Teiles völlig analog. Insbesondere mußte auch hier die Verzweigungsfrage noch unbeantwortet bleiben. Einer eingehenderen

[4]) Man findet die wichtigste Literatur über ringförmige Gleichgewichtsfiguren (Laplace, Frau Kowalewski, Poincaré) in der Einleitung und insbesondere in den Fußnoten [2]) und [3]) der betreffenden Abhandlung von Herrn Lichtenstein loc. cit. [5]) III. Abh., S. 83—85 zusammengestellt.

Diskussion der Verzweigungsfrage, den noch unberücksichtigt gelassenen Stabilitätsbetrachtungen und einer sich im ersten und dritten Teil darbietenden, naheliegenden hydrodynamischen Ausdeutung[5]) sollen spätere Untersuchungen gewidmet sein. Weitere verwandte Problemstellungen ergeben sich, wenn man die punktförmige Zentralmasse durch eine Flüssigkeitsmasse von der Gestalt einer Kugel, eines Maclaurinschen Ellipsoides oder eines Ringkörpers mit kreisförmigem Querschnitt ersetzt.

Erster Teil.

Das ebene Problem.

§ 1.

Problemstellung.

Den Betrachtungen in der Ebene legen wir zwei rechtwinklige Koordinatensysteme (x_0, y_0) und (x, y) zugrunde, die durch die Beziehungen

$$x_0 = x + L, \qquad y_0 = y, \qquad (L > 0) \tag{1.1}$$

miteinander verknüpft sind. Der Ursprung des zweiten Systems (x, y) sei zugleich der Mittelpunkt einer Ellipsenfläche T, deren Berandung S durch die Gleichung

$$\frac{X^2}{R_1^2} + \frac{Y^2}{R_2^2} = 1 \qquad (R_1 > 0,\ R_2 > 0) \tag{1.2}$$

gegeben werde. Dann erhält man für die Richtungskosinus a, b der im Punkte $P = (X, Y)$ auf S errichteten Außennormale (ν) die Werte

$$a = \frac{Xp}{R_1^2}, \qquad b = \frac{Yp}{R_2^2}, \tag{1.3}$$

wobei

$$p = \left[\frac{X^2}{R_1^4} + \frac{Y^2}{R_2^4}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

den Abstand der Tangente in P an S vom Mittelpunkte der Ellipse bedeutet.

Es möge jetzt S_1 eine geschlossene Kurve mit stetiger Normale in einer (hinreichend nahen) Nachbarschaft erster Ordnung[6]) von S bezeichnen,

---

[5]) Vgl. ähnliche hydrodynamische Fragestellungen in dem Buch von Herrn Lichtenstein, Grundlehren der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 443 u. S. 450 ff.

[6]) Das soll folgendes bedeuten: S_1 läßt sich auf S derart umkehrbar eindeutig und stetig (topologisch) abbilden, daß nach Vorgabe einer hinreichend kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ sowohl der Abstand zugeordneter Kurvenpunkte als auch der von den (in diesen Punkten an die jeweilige Kurve errichteten) Normalen eingeschlossene Winkel absolut genommen unterhalb ε zu liegen kommt.

so daß die Normale (ν) einen einzigen Durchstoßpunkt $P_1 = (X_1, Y_1)$ auf S_1 bestimmt. Die (nach außen hin positiv zu zählende) Strecke $\overrightarrow{PP_1}$ werde mit $p\zeta$ bezeichnet. Dann gilt

$$(1.5)\quad X_1 = X + a\,p\zeta = X\Big(1 + \frac{p^2}{R_1^2}\zeta\Big), \qquad Y_1 = Y + b\,p\zeta = Y\Big(1 + \frac{p^2}{R_2^2}\zeta\Big).$$

Wird die Lage der Punkte auf S überdies auf einen Parameter ξ bezogen, so läßt sich für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, etwa

$$(1.6)\qquad |\zeta| < \varepsilon^*,$$

die Lage der Punkte auf S_1 eindeutig durch das System (ξ, ζ) charakterisieren. Wir können die Funktion $\zeta = \zeta(\xi)$ mit stetiger erster Ableitung begabt voraussetzen. Im vorliegenden Falle erweist es sich als zweckmäßig, für den Parameter ξ die exzentrische Anomalie ψ einzuführen. Wegen

$$(1.7)\qquad X = R_1 \cos\psi, \qquad Y = R_2 \sin\psi, \qquad 0 \leqq \psi < 2\pi$$

treten an die Stelle der Beziehungen (1.3), (1.4), (1.5) jetzt die folgenden

$$(1.8)\qquad a = \frac{p}{R_1}\cos\psi, \qquad b = \frac{p}{R_2}\sin\psi,$$

$$(1.9)\qquad \frac{R_1^2 R_2^2}{p^2} = R_2^2\cos^2\psi + R_1^2\sin^2\psi,$$

$$(1.10)\qquad X_1 = R_1\Big(1 + \frac{p^2}{R_1^2}\zeta\Big)\cos\psi, \qquad Y_1 = R_2\Big(1 + \frac{p^2}{R_2^2}\zeta\Big)\sin\psi.$$

Wir denken uns nunmehr in dem Ursprung des Systems (x_0, y_0) die punktförmige Masse M fixiert und das von S_1 begrenzte Gebiet T_1 mit homogener, gravitierender (dem Anziehungsgesetz des logarithmischen Potentials unterworfener), inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeitsmasse der Dichte f belegt. Das aus M und T_1 bestehende System rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 gleichförmig und wie eine starre Konfiguration um das Attraktionszentrum M.

Unsere Aufgabe besteht nun in der Bestimmung solcher geschlossener Kurven S_1 in einer Nachbarschaft erster Ordnung der Ellipse S für geeignete Werte des Achsenverhältnisses $R_1 : R_2$ und der Winkelgeschwindigkeit ω_1, für welche sich das System M, T_1 im relativen Gleichgewicht befindet.

Die auf T_1 einwirkenden Kräfte sind Eigengravitation, Zentrifugalkräfte und Attraktion der Zentralmasse M. Wird unter $\varkappa$ die Gravitationskonstante, unter $\varkappa f V_1(x, y)$ das logarithmische Potential von T_1, unter $\varkappa f V(x, y)$ dasjenige der entsprechend belegten Ellipsenfläche T und endlich unter $\varkappa f G(x, y)$ das von der Anziehung der Zentralmasse M her-

rührende logarithmische Potential jeweils im Punkte x, y verstanden, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für das relative Gleichgewicht in dem Punkte $P_1 = (X_1, Y_1)$ auf S_1

$$(1.11)\quad V_1(X_1, Y_1) + \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}[(L + X_1)^2 + Y_1^2] + G(X_1, Y_1) = s_1 \quad (s_1 \text{ konstant}).$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß wir im folgenden das logarithmische Potential in der Form $\varkappa M \log \frac{L}{r}$ $(r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2)$ ansetzen wollen.

§ 2.

Vorbereitende Betrachtungen.

Die von Herrn Lichtenstein[7]) entwickelte Methode zur Bestimmung neuer Gleichgewichtsfiguren nimmt im allgemeinen ihren Ausgang von einer bereits bekannten Gleichgewichtsfigur; doch erstreckt sich ihre Anwendbarkeit auch noch auf den Fall, daß die zugrunde gelegte Figur eine Gleichgewichtsfigur nur in einer ersten Annäherung darstellt[8]). Das vorliegende Problem ist, wie wir sogleich sehen werden, dieser zweiten Art zuzurechnen.

Dies zu prüfen, machen wir den Ansatz

$$(2.1)\quad V(X, Y) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}[(L + X)^2 + Y^2] + G(X, Y) = s_0 + \Psi(X, Y), \quad (s_0 \text{ konstant}),$$

wobei ω den Wert der Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, den wir in Analogie zu den Ausführungen in § 1 der angenäherten Gleichgewichtsfigur T zuordnen, und unter $\Psi(X, Y)$ eine geeignete Korrektionsfunktion verstanden, die im Falle relativen Gleichgewichts verschwindet. Wir werden dann zeigen, daß sich Winkelgeschwindigkeit und Achsenverhältnis derart bestimmen lassen, daß $|\Psi(X, Y)|$ mit dem Parameter $h = \frac{R_1}{L}$ beliebig klein ausfällt.

Das logarithmische Potential der homogen mit Masse der Dichte 1 belegten Ellipsenfläche T ist in bekannter Weise auf dem Rande von der Form

$$(2.2)\quad V(X, Y) = D - AX^2 - BY^2,$$

[7]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. I. Abhandlung. Allgemeine Existenzsätze. Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 229—284; **3** (1919), S. 172—174. II. Abhandlung. Stabilitätsfragen. Ebenda **7** (1920), S. 126—231.

[8]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. I. Abh. Die Laplacesche Theorie des Erdmondes. Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 130—159. II. Abh. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten. Ebenda **12** (1922), S. 201—218. III. Abh. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. Ebenda **13** (1922), S. 82—118.

und die positiven Konstanten A, B, D haben die Werte

$$(2.3)\quad A = \pi\frac{1-r}{2}, \qquad B = \pi\frac{1+r}{2}, \qquad D = \pi R_1 R_2\left(\frac{1}{2} + \log\frac{L(1+r)}{R_1}\right),$$
$$\left(r = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right).$$

Eliminieren wir Y^2 gemäß (1.2), so erhalten wir nach einer leichten Rechnung

$$(2.4)\quad V(X,Y) = D - BR_2^2 + \left(B\frac{R_2^2}{R_1^2} - A\right)X^2$$
$$= \pi R_1 R_2\left[\frac{r}{2} + \log\frac{L}{R_1}(1+r)\right] - \pi r\frac{1-r}{1+r}X^2.$$

Das von der Anziehung der Zentralmasse herrührende Potential $G(X, Y)$ gestattet eine Entwicklung in eine für hinreichend kleine Werte von h, etwa

$$(2.5)\quad h \leqq h^*,$$

absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$(2.6)\quad G(X,Y) = \frac{M}{f}\log\frac{L}{[(L+X)^2+Y^2]^{\frac{1}{2}}}$$
$$= -\frac{M}{2fL^2}\left[2XL + Y^2 - X^2 + h\frac{2X}{3R_1}(X^2 - 3Y^2)\right.$$
$$\left. + h^2\frac{1}{2R_1^2}(6X^2Y^2 - X^4 - Y^4) + O(h^3)\right] = \mathfrak{G} + h\hat{\mathfrak{G}},$$

mit

$$(2.7)\quad \mathfrak{G}(X,Y) = -\frac{M}{2fL^2}[2XL + Y^2 - X^2],$$

$$(2.8)\quad h\hat{\mathfrak{G}}(X,Y)$$
$$= -h\frac{M}{2fL^2}\left[\frac{2X}{3R_1}(X^2 - 3Y^2) + h\frac{1}{2R_1^2}(6X^2Y^2 - X^4 - Y^4) + O(h^2)\right].$$

Eine leichte Umformung gemäß (1.2) liefert

$$(2.9)\quad \mathfrak{G}(X,Y) = -\frac{M}{2fL^2}\left[R_2^2 + 2XL - 2\frac{1+r^2}{(1+r)^2}X^2\right].$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(2.10)\quad \frac{\omega^2}{2\varkappa f}[(L+X^2)+Y^2] = \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left[L^2 + R_2^2 + 2XL + \frac{4r}{(1+r)^2}X^2\right].$$

Treffen wir nun der Reihe nach über Winkelgeschwindigkeit, Achsenverhältnis der Ellipse S und die Konstante s_0 die folgenden Festsetzungen [9])

[9]) Sie ergeben sich formal durch Koeffizientenvergleich in (2.1).

$$\frac{\omega^2}{\varkappa f} = \frac{M}{f L^2}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} = r \frac{1-r}{1+r}, \tag{2.12}$$

$$s_0 = \pi R_1 R_2 \left[\frac{r}{2} + \log \frac{L}{R_1}(1+r)\right] + \pi \frac{r}{2} \frac{1-r}{1+r} L^2, \tag{2.13}$$

so folgt, wie man sich leicht durch Einsetzen der Ausdrücke (2.4), (2.6), (2.9) und (2.10) in die Gleichung (2.1) überzeugt, in der Tat

$$\Psi(X, Y) = h \hat{\mathfrak{G}}(X, Y). \tag{2.14}$$

Dies besagt aber gerade, daß S (für kleine Werte von h) eine angenäherte Gleichgewichtsfigur darstellt, sofern sich die Bedingungen (2.11), (2.12), (2.13) realisieren lassen. Die Gleichung (2.11) gibt die „Keplersche" Winkelgeschwindigkeit für den zweidimensionalen Fall.

Wegen (2.14) kann man für (2.1) jetzt auch schreiben

$$V(X, Y) + \frac{\omega^2}{2 \varkappa f}[(L+X)^2 + Y^2] + \mathfrak{G}(X, Y) = s_0. \tag{2.15}$$

Läßt man also das Zusatzfeld $\varkappa f h \hat{\mathfrak{G}}$ außer acht und nur das Außenfeld $\varkappa f \mathfrak{G}$ an Stelle von $\varkappa f G$ einwirken, so hat man es offenbar mit einer effektiven Gleichgewichtsfigur zu tun. Für unendlich kleine Ellipsen ($h = 0$) werden die Gleichungen (2.1) und (2.15) miteinander identisch.

Wir schreiten jetzt zur Diskussion der Annahme (2.12). Diese Formel liefert uns zur Bestimmung des Achsenverhältnisses r als Funktion der Winkelgeschwindigkeit die in r quadratische Gleichung

$$r^2 + r(\Omega - 1) + \Omega = 0, \qquad \left(\Omega = \frac{\omega^2}{\pi \varkappa f}\right). \tag{2.16}$$

Ihre Wurzeln fallen nur für $\Omega \geqq 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}828\ldots$ und $\Omega \leqq 3 - 2\sqrt{2} = 0{,}171\ldots$ reell aus, zugleich positiv aber nur für $0 \leqq \Omega \leqq 3 - 2\sqrt{2}$. Hier gilt dann $0 \leqq r \leqq 1$. Zu einem gegebenen Wert der Winkelgeschwindigkeit (und damit der Entfernung der Ellipse S vom Attraktionszentrum M), der nur der Bedingung $0 \leqq \Omega \leqq 3 - 2\sqrt{2}$ bzw. $0 \leqq \omega \leqq \left|\sqrt{\pi \varkappa f (3 - 2\sqrt{2})}\right|$ unterworfen ist, gehören demnach stets zwei positive reelle Werte $\overset{+}{r}$ und $\bar{r}$; insbesondere zu $\Omega = 0$ die Werte $\bar{r} = 0$ (Entartung der Ellipse in einen Kreis) und $\overset{+}{r} = 1$ (Entartung in eine Strecke) bei der „Entfernung $L = \infty$" von der Zentralmasse M oder in beliebiger Entfernung für $M = 0$; dem Wert $\Omega = \mathring{\Omega} = 3 - 2\sqrt{2}$ entspricht die Doppelwurzel $\bar{r} = \overset{+}{r} = \mathring{r} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142\ldots$ für den Minimalabstand $\mathring{L} = \sqrt{\frac{M}{\pi f}(3 + 2\sqrt{2})}$ bei festgehaltener Zentralmasse, bzw. für die maximale Zentralmasse $\mathring{M} = (3 - 2\sqrt{2}) \pi f L^2$ bei fester Entfernung L. Die durch $r = \mathring{r}$ definierte Ellipse heiße $\mathring{S}$.

Indem wir jetzt die Zentralmasse als unveränderlich vorgegeben ansehen, gelangen wir zu folgendem Resultat:

Bei sehr großem Abstand L von der Zentralmasse M besitzt S nahezu die Gestalt eines Kreises, S ist als zweidimensionales Analogon zu dem Laplaceschen Mondkörper[10]) *aufzufassen. Läßt man jetzt die Entfernung L kleiner und kleiner werden, wächst also die Winkelgeschwindigkeit immer mehr und mehr, so nimmt die Ellipse in Richtung auf das Attraktionszentrum hin eine mehr und mehr gestreckte Form an. Das geht so lange, bis die Entfernung L ihr Minimum $\mathring{L}$ erreicht hat. Die Gesamtheit der derart durch $\bar{r}$ definierten Ellipsen bildet eine lineare Reihe*[11]) *angenäherter Gleichgewichtsfiguren. Zu einer weiteren linearen Reihe gelangen wir, wenn wir, von $\mathring{S}$ ausgehend, die durch $\overset{+}{r}$ charakterisierten Ellipsen für wachsendes L verfolgen. Hierbei nimmt die Winkelgeschwindigkeit jetzt ständig ab. Für große Werte von L nehmen die Ellipsen nunmehr nahezu die Gestalt einer Strecke an.*

Die beiden durch $\bar{r}$ und $\overset{+}{r}$ definierten linearen Reihen angenäherter Gleichgewichtsfiguren hängen in der durch $\bar{r} = \overset{+}{r} = \mathring{r}$ ausgezeichneten Ellipse $\mathring{S}$ zusammen.

§ 3.

Aufstellung der fundamentalen Integro-Differentialgleichung.

Unter Verwendung der Beziehungen (2.1) und (2.14) erhält (1.11) die Gestalt

$$(3.1)\quad V_1(X_1, Y_1) - V(X, Y) + \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}[(L+X_1)^2 + Y_1^2] - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}[(L+X)^2 + Y^2] + G(X_1, Y_1) - G(X, Y) = s_1 - s_0 - h\,\hat{\mathfrak{G}}(X, Y).$$

Nachdem nun in § 2 gezeigt worden ist, daß unter geeigneten Annahmen ((2.11), (2.12), (2.13), (2.5)) die Ellipse S tatsächlich näherungsweise eine Gleichgewichtsfigur darstellt, können wir uns für das weitere der in loc. cit. [7]) entwickelten Methode bedienen[12]). Sie liefert für das Potential

---

[10]) Ein exakter Existenzbeweis dieser Figur wird in loc. cit. [8]) I. Abhandlung gegeben. Weitere Untersuchungen, die sich mit diesem Problem beschäftigen, finden sich in der Note von E. Hölder, Beiträge zur mathematischen Theorie der Gestalt des Erdmondes. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Akad. der Wissenschaften, Math.-phys. Klasse, 78 (1926), Heft II, S. 73–88.

[11]) Allgemein wird unter einer linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren eine von einem oder mehreren Parametern abhängige stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren verstanden. Wie bereits oben bemerkt, haben wir es für $h = 0$ mit linearen Reihen effektiver Gleichgewichtsfiguren zu tun.

[12]) Man vergleiche hierzu § 9, Anhang. Es kommen hier vor allem die Betrachtungen und Ergebnisse aus loc. cit. [7]) II. Abh., S. 140 ff. in Betracht.

$V_1(X_1, Y_1)$ eine Darstellung in Form einer für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{d\zeta}{d\psi}\right|$, etwa

$$|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{d\psi}\right| < \varepsilon \leqq \varepsilon^*, \tag{3.2}$$

absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe

$$V_1(X_1, Y_1) - V(X, Y) = U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots, \tag{3.3}$$

in welcher die $U^{(n)}$ gewisse Integralausdrücke über Formen n-ten Grades in ζ, ζ', $\frac{d\zeta'}{d\psi'}$ bedeuten. Speziell ist

$$U^{(1)} = p\zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y) + \int_S p'\zeta' \log \frac{L}{\varrho}\, d\sigma', \tag{3.4}$$

wenn

$$\varrho = [(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

den Abstand der beiden auf S gelegenen Punkte P und P',

$$d\sigma' = \frac{R_1 R_2}{p'}\, d\psi' \tag{3.6}$$

das zu P' gehörige Bogenelement auf S bezeichnet.

Den Ausdruck (3.4) unterwerfen wir noch einigen leichten Umformungen. Zunächst finden wir auf Grund der Formeln (2.2), (2.11), (2.12), (1.4) und (1.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \nu} &= -2B\frac{R_2^2}{p} - 2\pi r \frac{1-r}{1+r} p \cos^2\psi \\ &= -\pi R_1 R_2 \frac{1-r}{p} - 2\pi r \frac{1-r}{1+r} p \cos^2\psi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\Theta^* = R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \zeta'\, d\psi' \tag{3.8}$$

und berücksichtigen, daß

$$\log \frac{L}{\varrho} = \log \frac{R_1}{\varrho(1+r)} + \log \frac{L}{R_1}(1+r) \tag{3.9}$$

gilt, so wird

$$\int_S p'\zeta' \log \frac{L}{\varrho}\, d\sigma' = R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \zeta' \log \frac{R_1}{\varrho(1+r)}\, d\psi' + \Theta^* \log \frac{L}{R_1}(1+r) \tag{3.10}$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} U^{(1)} = &-\pi R_1 R_2 (1-r)\zeta - 2\pi r \frac{1-r}{1+r} p^2 \zeta \cos^2\psi \\ &+ \Theta^* \log \frac{L}{R_1}(1+r) + R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \zeta' \log \frac{R_1}{\varrho(1+r)}\, d\psi'. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nach Einführung des kleinen Parameters λ vermöge

$$\frac{\omega_1^2-\omega^2}{2\varkappa f}=\frac{\pi R_2}{2L}\lambda, \qquad |\lambda|\leqq h \tag{3.12}$$ [13])

können wir den zweiten Differenzenausdruck aus (3.1) auf die Form

$$\begin{aligned}\frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}[(L+X_1)^2+Y_1^2]-\frac{\omega^2}{2\varkappa f}[(L+X)^2+Y^2] \qquad (3.13)\\ =\frac{\pi R_2}{2L}\lambda\left(L^2+R_2^2+2XL+\frac{4r}{(1+r)^2}X^2\right)\\ +\left(\frac{\pi r}{2}\frac{1-r}{1+r}+\frac{\pi R_2}{2L}\lambda\right)\left(2L\frac{p^2}{R_1}\zeta\cos\psi+2p^2\zeta+p^2\zeta^2\right)\\ =\frac{\pi R_2}{2L}\lambda\left(L^2+\frac{R_1^2+R_2^2}{2}\right)+\pi R_1R_2\lambda\cos\psi\\ +\pi R_1R_2\lambda h\frac{r}{(1+r)^2}\cos 2\psi+\frac{\pi r}{2}\frac{1-r}{1+r}(2Lap\zeta+2p^2\zeta+p^2\zeta^2)\\ +\pi\frac{1-r}{1+r}p^2\zeta\lambda\cos\psi+\frac{\pi}{2}\frac{1-r}{1+r}p^2\zeta\lambda h(2+\zeta)\end{aligned}$$

bringen.

Für hinreichend kleine Werte von h, etwa

$$h\leqq h_*\leqq h^*, \tag{3.14}$$

ergibt sich eine zu (2.6) völlig analoge Entwicklung

$$G(X_1,Y_1)=\mathfrak{G}(X_1,Y_1)+h\,\hat{\mathfrak{G}}(X_1,Y_1). \tag{3.15}$$

Insbesondere wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(X_1,Y_1)-\mathfrak{G}(X,Y)=-\frac{\pi r}{2}\frac{1-r}{1+r}[2Lap\zeta+2p^2\zeta+p^2\zeta^2] \qquad (3.16)\\ +2\pi r\frac{1-r}{1+r}p^2\zeta\cos^2\psi+\pi r\frac{1-r}{1+r}\frac{p^4\zeta^2}{R_1^2}\cos^2\psi.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (3.3), (3.11), (3.13), (3.15) und (3.16) in die grundlegende Beziehung (3.1) findet man, wie man sich

[13]) Diese Annahme wird durch die folgende Betrachtung nahe gelegt. In der Beziehung (3.12) stellt sich $h\lambda$ als kleine Änderung des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit dar. Aus (2.11) folgt aber für die Änderung $\delta\Omega$ des Ausdruckes $\Omega=\frac{M}{\pi fL^2}$ bei einer Verschiebung des Ellipsenmittelpunktes um δL in einer ersten Annäherung $\delta\Omega=-\frac{2}{L}\Omega\,\delta L$, so daß sich also auch λ, nicht nur $h\lambda$, selbst noch als klein ergibt. Der obigen Festsetzung entspricht eine Verschiebung um $\delta L=-\frac{R_2\lambda}{2\Omega}$.

leicht überzeugt,

$$(3.17)\quad -\pi R_1 R_2 (1-r)\zeta + \Theta^* \log\frac{L}{R_1}(1+r) + R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \zeta' \log\frac{R_1}{\varrho(1+r)}\, d\psi'$$
$$+ U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots + \frac{\pi R_2}{2L}\lambda\left(L^2 + \frac{R_1^2+R_2^2}{2}\right) + \pi R_1 R_2 \lambda \cos\psi$$
$$+ \pi R_1 R_2 \lambda h \frac{r}{(1+r)^2}\cos 2\psi + \pi \frac{1-r}{1+r} p^2 \zeta\lambda\cos\psi + \frac{\pi}{2}\frac{1-r}{1+r} p^2 \zeta\lambda h(2+\zeta)$$
$$+ \pi r \frac{1-r}{1+r}\frac{p^4}{R_1^2}\zeta^2\cos^2\psi + h\,\hat{\mathfrak{G}}(X_1, Y_1) + s_0 - s_1 = 0\,.$$

Wir denken uns nun die Konstante s_1 gemäß der Relation

$$(3.18)\quad s_0 - s_1 + \Theta^* \log\frac{L}{R_1}(1+r) + \frac{\pi R_2}{2L}\lambda\left(L^2 + \frac{R_1^2+R_2^2}{2}\right) = \pi R_1 R_2 s$$

bestimmt, unter s ein kleiner auf S_1 konstanter Parameter verstanden, und setzen noch zur Abkürzung

$$(3.19)\quad \mathsf{P}(\zeta) = \frac{1-r}{1+r}\left[\frac{p^2}{R_1 R_2}\zeta\lambda\cos\psi + \frac{p^2}{2R_1 R_2}\zeta\lambda h(2+\zeta) + r\frac{p^4}{R_1^3 R_2}\zeta^2\cos^2\psi\right];$$
$$\mathsf{P}(0) = 0.$$

Schaffen wir nunmehr in (3.17) die in ζ linearen Glieder auf eine Seite, die Glieder von mindestens zweiter Ordnung bezüglich ζ und die mit den kleinen Parametern s, λ, h behafteten Terme auf die andere Seite, *so erhalten wir die fundamentale Gleichgewichtsbedingung in Gestalt einer (nicht linearen) Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion* $\zeta = \zeta(r; s, \lambda, h; \psi)$

$$(3.20)\quad (1-r)\zeta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' \log\frac{R_1}{\varrho(1+r)}\, d\psi' = s + \lambda\cos\psi + \lambda h\frac{r}{(1+r)^2}\cos 2\psi$$
$$+ \mathsf{P}(\zeta) + \frac{1}{\pi R_1 R_2}\left[h\,\hat{\mathfrak{G}}(X, Y_1) + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots\right].$$

Wir werden gelegentlich ihre rechte Seite zur Abkürzung mit $\Pi(\zeta)$, ausführlicher mit $\Pi(r; s, \lambda, h; \psi; \zeta)$ bezeichnen.

§ 4.

Die homogene Integralgleichung.

Wir betrachten zunächst die durch Nullsetzen der rechten Seite aus (3.20) hervorgehende homogene lineare Integralgleichung

$$(4.1)\qquad \zeta - \frac{1}{\pi(1-r)}\int_0^{2\pi} \zeta' \log\frac{R_1}{\varrho(1+r)}\, d\psi' = 0 \qquad (0 < r < 1).$$

Sie hat, wie wir im folgenden zeigen werden, für jedes r in $(0, 1)$ mindestens eine (einer Drehung des Systems um M entsprechende) triviale Nullösung der Form

$$u_1 = k_1 \sin\psi \qquad (k_1 = k_1(r) \text{ auf } S \text{ konstant}) \tag{4.2}$$

und außerdem für abzählbar unendlich viele Werte von $r = r_n$ $(n > 1)$ je genau eine weitere Nullösung der Form

$$u_2 = u_2^{(n)} = k_2 \cos n\psi \qquad (n > 1,\ k_2 \text{ auf } S \text{ konstant}). \tag{4.3}$$

Hat (4.1) nur die triviale Nullösung (4.2), so heiße der zu S gehörige Wert r regulär; anderenfalls wollen wir $r = r_n$ als singulären Wert bezeichnen.

Die gegenüber (4.1) durch den reellen Parameter l_n erweiterte homogene Integralgleichung

$$v - l_n \int_0^{2\pi} v' \log \frac{R_1}{\varrho(1+r)}\, d\psi' = 0 \tag{4.4}$$

definiert wegen

$$\varrho^2 = (X'-X)^2 + (Y'-Y)^2 = \frac{4R_1^2}{(1+r)^2} \sin^2\frac{\vartheta}{2}\,[1 + r^2 - 2r\cos\tau] \tag{4.5}$$

$$(\vartheta = \psi' - \psi,\ \tau = \psi' + \psi)$$

die Nullösung

$$v = \int_0^{2\pi} l_n v' \log \frac{1}{2\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|}\, d\psi' + \int_0^{2\pi} l_n v' \log \frac{1}{\sqrt{|1 + r^2 - 2r\cos\tau|}}\, d\psi' \tag{4.6}$$

als Summe von zwei logarithmischen Linienpotentialen, des logarithmischen Potentials der mit Masse der Dichte $l_n v'$ belegten Einheitskreisperipherie im Peripheriepunkte $(1, \psi)$ und des entsprechenden Potentials im Punkte $(r, -\psi)$ im Innern des Einheitskreises. Bezeichnen wir das logarithmische Potential dieser Linienbelegung in einem beliebigen Punkte (d, ψ) mit $u(d, \psi)$ so lautet (4.6) nunmehr

$$v = v(\psi) = u(1, \psi) + u(r, -\psi). \tag{4.6'}$$

Unter Berücksichtigung der Entwicklung

$$-\tfrac{1}{2}\log(1 + d^2 - 2d\cos\vartheta) = -\Re\{\log(1 - z)\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^m}{m}\cos m\vartheta, \tag{4.7}$$

$$(z = d\,e^{i\vartheta},\ 0 \leqq d \leqq d^* < 1),$$

die in jedem zum Einheitskreise konzentrischen kleineren Kreise gleichmäßig konvergiert, ergibt gliedweise Integration

$$u(d, \psi) = \int_0^{2\pi} l_n v(\psi') \log \frac{1}{\sqrt{|1 + d^2 - 2d\cos\vartheta|}}\, d\psi' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^m}{m} \int_0^{2\pi} l_n v(\psi') \cos m\vartheta\, d\psi \tag{4.8}$$

Auf der Peripherie des Einheitskreises nimmt die durch (4.8) im Innern dargestellte Potentialfunktion (4.8) gemäß (4.6′) augenscheinlich die Werte $u(1, \psi) = v(\psi) - u(r, -\psi)$ an. Diejenige im Innern des Einheitskreises reguläre Potentialfunktion, die auf der Peripherie gerade die angegebenen Werte annimmt, läßt sich andererseits aber im Innern in bekannter Weise in eine (etwa für $0 \leqq d \leqq d_* \leqq d^* < 1$) gleichmäßig konvergente Reihe der Form

$$u(d, \psi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d^n (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi) \tag{4.9}$$

entwickeln. Wegen (4.6′) und (4.8) berechnen sich die Koeffizienten zu

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [v(\psi) - u(r, -\psi)] \cos n\psi \, d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\psi') \cos n\psi' \, d\psi' - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m} \int_0^{2\pi} l_n v(\psi') \int_0^{2\pi} \cos m\vartheta \cos n\psi \, d\psi \, d\psi' \\ &= \left[\frac{1}{\pi} - l_n \frac{r^n}{n}\right] \int_0^{2\pi} v(\psi') \cos n\psi' \, d\psi', \qquad (n > 1) \\ b_n &= \left[\frac{1}{\pi} + l_n \frac{r^n}{n}\right] \int_0^{2\pi} v(\psi') \sin n\psi' \, d\psi'. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Aus der Unität der Entwicklung im Innern des Einheitskreises folgt durch Koeffizientenvergleich nach (4.8) und (4.10)

$$1 - \pi l_n \frac{1+r^n}{n} = 0, \quad 1 - \pi l_n \frac{1-r^n}{n} = 0 \qquad (n > 1).^{14}) \tag{4.11}$$

Die zu den gemäß

$$\int_0^{2\pi} v^2 \, d\psi = 1 \tag{4.12}$$

normierten Eigenfunktionen

$$v: \quad \frac{\cos\psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin\psi}{\sqrt{\pi}}; \ \ldots; \ \frac{\cos n\psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\psi}{\sqrt{\pi}}; \ \ldots \tag{4.13}$$

gehörigen einfachen Eigenwerte lauten demnach

$$l_n: \quad \frac{1}{\pi(1+r)}, \frac{1}{\pi(1-r)}; \ \ldots; \ \frac{n}{\pi(1+r^n)}, \frac{n}{\pi(1-r^n)}; \ \ldots . \tag{4.14}$$

---

14) Man vergleiche zu dem Vorstehenden die ganz ähnlichen Betrachtungen bei É. Picard, Sur un théorème général relativ aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique, Rendiconti del circolo mat. di Palermo **29** (1910), S. 79–97, insbes. S. 93 ff.

Indem wir jetzt zu der speziellen, für $l_n = \frac{1}{\pi(1-r)}$ aus (4.4) hervorgehenden Integralgleichung (4.1) zurückkehren, erkennen wir, daß (4.1) dann und nur dann Nullösungen der Form (4.13) besitzt, wenn die Gleichungen

$$1 - r = \frac{1+r^n}{n}, \tag{4.15}$$

$$1 - r = \frac{1-r^n}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.16}$$

Lösungen in dem Intervall $(0, 1)$ besitzen.

Setzen wir

$$f_n(r) \equiv r^n + nr - (n-1), \tag{4.17}$$

so gilt für $n > 1$

$$f_n(0) = -(n-1) < 0, \quad f_n(1) = 2 > 0, \tag{4.18}$$

$$f_n'(r) = nr^{n-1} + n > 0 \text{ in } \langle 0, 1\rangle,$$

und darum hat (4.15) eine einzige Wurzel r_n in $\langle 0, 1\rangle$.

Aus der Ungleichheit

$$f_{n+1}(r_n) = r_n^{n+1} + (n+1)r_n - n = r_n^{n+1} + nr_n - (n-1) + r_n - 1 \tag{4.19}$$

$$< r_n^n + nr_n - (n-1) = f_n(r_n) = 0$$

zusammen mit (4.18) folgt

$$r_2 < r_3 < \ldots < r_n < r_{n+1} < \ldots \qquad (n > 2). \tag{4.20}$$

Wird endlich (4.15) in der Form

$$r = 1 - \frac{1+r^n}{n} \tag{4.21}$$

angeschrieben, so erkennt man unmittelbar das Bestehen der Ungleichheiten

$$1 - \frac{2}{n} < r_n < 1 - \frac{1}{n}. \tag{4.22}$$

Für den speziellen Wert $n = 2$ liefert (4.15) das uns aus § 2 her bekannte, zu der Figur $\mathring{S}$ gehörige Achsenverhältnis

$$r_2 = \mathring{r} = \sqrt{2} - 1. \tag{4.23}$$

Im Fall $n = 1$ schließlich ergibt sich $r = 0$ als einzige Lösung, die Ellipse ist in einen Kreis entartet. Andererseits stellt sich die Entartung in eine Strecke als Grenzfall für $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ dar.

Die Gleichung (4.16) mit $n = 1$ ist für alle r in $\langle 0, 1\rangle$ identisch erfüllt. Bringen wir sie in die Form

$$n = \frac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}, \tag{4.24}$$

so sehen wir sofort, daß für $n > 1$ keine Wurzel in $(0, 1)$ enthalten ist.

Wir fassen zusammen:

Die homogene Integralgleichung (4.1) *besitzt überall in* $0 < r < 1$ *die triviale Nullösung* $u_1 = \frac{\sin\psi}{\pi\sqrt{1-r}}$.[15] *Für die abzählbar unendlich vielen sich gegen* $r = 1$ *häufenden singulären Werte* r_n, *die alle der Reihe „stärker abgeplatteter" Ellipsen angehören, gibt es je noch eine nichttriviale Nullösung* $u_2 = \frac{\cos n\psi}{\pi\sqrt{1-r}}$.[15]

Schließlich sei noch auf den Zusammenhang der vorliegenden Betrachtungen mit den Laméschen Funktionen hingewiesen. Herr B. Globa-Mikhaïlenko hat anläßlich ähnlicher Fragestellungen (insbesondere bei Betrachtung der Gleichgewichtsfiguren, die von unendlich langen Zylindern mit elliptischem Querschnitt ohne Außenfeld gebildet werden[16]) die Laméschen Funktionen in die Ebene übertragen[17]). Man überzeugt sich ohne viel Mühe, daß sich mit ihrer Hilfe und auf einem dem oben beschriebenen ganz ähnlichen Wege (wobei jetzt für die trigonometrischen Entwicklungen solche nach Laméschen Produkten eintreten) dieselben Ergebnisse, insbesondere die Eigenwerte (4.14) und die Gleichungen (4.15), (4.16), ergeben. Unsere Eigenfunktionen hängen in der einfachsten Weise mit gewissen Laméschen Funktionen zusammen. Im räumlichen Fall werden wir von der Einführung Lamé'scher Funktionen wesentlichen Gebrauch machen.

§ 5.

Auflösung der fundamentalen Integro-Differentialgleichung.

Der von den räumlichen Problemen ähnlicher Art her bekannte Existenzbeweis durch sukzessive Approximationen und unter Anwendung der Kernzerspaltung von Herrn E. Schmidt[18]) läßt sich ohne neue Schwierigkeiten auf das vorliegende ebene Problem übertragen. Wir werden daher nur so weit darauf eingehen, als es für die folgenden Betrachtungen von besonderer Wichtigkeit ist.

Wir setzen

$$(5.1)\quad N(\psi,\psi') = \log\frac{R_1}{\varrho\,(1+r)} - (1-r)\sin\psi\sin\psi' \quad \text{für reguläres } r,$$

$$(5.2)\quad N_n(\psi,\psi') = \log\frac{R_1}{\varrho\,(1+r)} - (1-r)\left[\sin\psi\sin\psi' + \cos n\psi\cos n\psi'\right] \text{für } r = r_n$$

---

[15]) Die linear unabhängigen Eigenfunktionen u_j von (4.1) setzen wir gemäß $\pi(1-r)\int_0^{2\pi} u_j^2\,d\psi = 1$ normiert voraus.

[16]) Also dem Analogon der Jacobischen Ellipsoide in der Ebene.

[17]) B. Globa-Mikhaïlenko, Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation (Thèse), Journal de Mathématiques, 7e série, Vol. II, fasc. 1.

[18]) Vgl. die unter [7]) und [8]) angeführten Abhandlungen von Herrn Lichtenstein.

und weiterhin zur Abkürzung

$$w = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' \cos n\psi'\, d\psi', \tag{5.3}$$

$$\hat{w} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' \sin \psi'\, d\psi'. \tag{5.4}$$

Es bedeuten demnach w, $\hat{w}$ kleine, vorläufig noch unbekannte Konstanten. Da S bezüglich der Geraden $y=0$ symmetrisch und $G(X_1, -Y_1) = G(X_1, Y_1)$ ist, gilt insbesondere $\hat{w} = 0$.

Jetzt geht die Integro-Differentialgleichung (3.20) über in

$$(1-r)\zeta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' N(\psi, \psi')\, d\psi' = \Pi(\zeta) \quad \text{für reguläres } r, \tag{5.5}$$

$$(1-r)\zeta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' N_n(\psi, \psi')\, d\psi' = \Pi(\zeta) + (1-r)\, w \cos n\psi \quad \text{für } r = r_n. \tag{5.6}$$

Setzen wir endlich noch

$$\hat{N}(\psi, \psi') = \begin{cases} N & \text{für reguläres } r, \\ N_n & \text{für } r = r_n, \end{cases}$$
$$\hat{\Pi}(\zeta) = \begin{cases} \Pi(\zeta) & \text{für reguläres } r, \\ \Pi(\zeta) + (1-r)\, w \cos n\psi & \text{für } r = r_n, \end{cases} \tag{5.7}$$

so können wir die beiden Beziehungen (5.5) und (5.6) in die eine für alle r gültige

$$(1-r)\zeta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' \hat{N}(\psi, \psi')\, d\psi' = \hat{\Pi}(\zeta) = \hat{\Pi}(r; \lambda, w, h, s; \psi, \zeta) \tag{5.8}$$

zusammenziehen, worin freilich für reguläre r stets $w = 0$ zu setzen ist. In jedem Fall hat die homogene Integralgleichung

$$(1-r)\zeta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' \hat{N}(\psi, \psi')\, d\psi' = 0 \tag{5.9}$$

keine Nullösungen mehr.

Nunmehr werden die sukzessiven Approximationen durch das System von Integralgleichungen

$$(1-r)\zeta_{i+1} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta'_{i+1} \hat{N}(\psi, \psi')\, d\psi' = \hat{\Pi}(\zeta_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots; \zeta_0 = 0) \tag{5.10}$$

erklärt. Bezeichnet weiterhin $H(\psi, \varphi')$ den zu dem Kern $\frac{1}{\pi(1-r)}\hat{N}(\psi, \psi')$ gehörigen lösenden Kern, so gilt

$$\zeta_{i+1} = \frac{1}{1-r}\hat{\Pi}(\zeta_i) + \frac{1}{1-r}\int_0^{2\pi} \hat{\Pi}(\psi'; \zeta_i')\, H(\psi, \psi')\, d\psi'. \tag{5.11}$$

Endlich läßt sich ohne Mühe zeigen, daß $\hat{\Pi}$ gewissen für das Gelingen des Verfahrens der sukzessiven Approximationen wesentlichen Ungleichheiten[19]) für hinreichend kleine Parameterwerte genügt. Es ergibt sich sodann eine und nur eine in den Parametern λ, w, h, s in einem Gebiete

$$|\lambda|, |w|, |h|, |s| \leqq \delta \tag{5.12}$$

analytische und reguläre Funktion

$$\zeta = \lim_{i\to\infty} \zeta_i = \sum a_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} \lambda^{\nu_0} w^{\nu_1} h^{\nu_2} s^{\nu_3} \qquad \begin{pmatrix} \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geqq 1 \\ \nu_0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3 \geqq 0 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

als Lösung der Integro-Differentialgleichung (5.8). Die Koeffizienten $a_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}$ sind noch Funktionen der exzentrischen Anomalie ψ und des Achsenverhältnisses r und können durch Integralgleichungen der Form

$$(1-r)\, a_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}(\psi) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \hat{N}(\psi, \psi')\, a_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}(\psi')\, d\psi' = A_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} \tag{5.14}$$

rekursiv gewonnen werden; $A_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}$ stellt den Koeffizienten von $\lambda^{\nu_0} w^{\nu_1} h^{\nu_2} s^{\nu_3}$ in $\hat{\Pi}(\zeta)$ dar, wenn für ζ das Polynom

$$\sum_{\iota=1}^{i} a_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \lambda^{\mu_0} w^{\mu_1} h^{\mu_2} s^{\mu_3} \quad (\sigma = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$$

eingeführt wird.

Für den regulären Fall ist damit die Aufgabe der Bestimmung von Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der zugrunde gelegten Ellipsen in eindeutiger Weise gelöst. Aus der Unität der Lösung, sowie aus den Beziehungen (2.12) und (3.12) folgt ferner, *daß die gefundenen regulären Gleichgewichtsfiguren sich swischen je zwei aufeinander folgenden singulären Stellen* (also „streckenweise") *hinsichtlich r zu linearen Reihen von Gleichgewichtsfiguren zusammenschließen*, die den in § 2 angeführten linearen Reihen von angenäherten Gleichgewichtsfiguren entsprechen. Die Frage nach der Möglichkeit des Zusammenschlusses über die singulären Stellen hinweg bleibt indessen vorläufig noch ungeklärt.

---

[19]) Über diese Ungleichheiten und das Verfahren der sukzessiven Approximationen siehe vor allem die Darstellung in § 2 der kürzlich erschienenen Monographie von L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin 1931, Julius Springer.

§ 6.

Bestimmung der Glieder erster Ordnung.

Wir legen den nun folgenden Betrachtungen die Definitionsformel für die erste Approximation, d. h. die Formel (5.10) mit dem speziellen Zeigerwert $i = 0$ zugrunde

$$(6.1) \qquad (1-r)\zeta_1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta_1' \hat{N}(\psi, \psi')\, d\psi' = \hat{\Pi}(\zeta_0) \equiv \hat{\Pi}(0).$$

Zur Bestimmung einer ersten Annäherung reicht es offenbar aus, in $\hat{\Pi}(0)$ unter den von ζ freien Gliedern nur diejenigen von erster Ordnung zu berücksichtigen. Nach leichten Umformungen auf Grund der Relationen (2.11), (2.12) und (1.7) liefert (2.8)

$$(6.2) \quad h\hat{\mathfrak{G}} = -\pi R_1 R_2 h \frac{r^2}{(1+r)^2}\cos\psi - \pi R_1 R_2 h \frac{r}{3}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}\cos 3\psi + O(h^2),$$

mithin findet man unter Berücksichtigung von (3.20) und (5.7) bis auf Glieder höherer Ordnung

$$(6.3) \quad \hat{\Pi}(0) = s + \lambda\cos\psi - h\frac{r^2}{(1+r)^2}\cos\psi - h\frac{r}{3}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}\cos 3\psi + (1-r)w\cos n\psi + \ldots,$$

wobei freilich im regulären Fall $w = 0$ zu setzen ist. Bei Außerachtlassung der Glieder von mindestens zweiter Ordnung erhalten wir $\hat{\Pi}(0)$ demnach in Gestalt eines reinen Cos-Polynoms,

$$(6.4) \quad \hat{\Pi}(0) = \frac{c_0}{2} + c_1\cos\psi + c_3\cos 3\psi + c_n\cos n\psi + \ldots \quad \begin{pmatrix} c_n = 0 \text{ im regulären} \\ \text{Fall für } n > 3 \end{pmatrix}$$

mit

$$(6.5) \quad \frac{c_0}{2} = s, \quad c_1 = \lambda - h\frac{r^2}{(1+r)^2}, \quad c_3 = -h\frac{r}{2}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}, \quad c_n = (1-r)w$$
$$(w = 0 \text{ im regulären Fall})$$

für alle regulären Stellen und die singulären $r = r_n$, $n \neq 3$. In dem speziellen singulären Fall $r = r_3$ gilt

$$(6.6) \quad \frac{c_0}{2} = s, \quad c_1 = \lambda - h\frac{r^2}{(1+r)^2}, \quad c_3 = (1-r)w - h\frac{r}{3}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}.$$

Verfährt man jetzt wieder wie in § 4 bei der Bestimmung der Eigenwerte, so erkennt man ohne Schwierigkeit, daß die Terme erster Ordnung von ζ_1 wiederum ein Cos-Polynom ergeben,

$$(6.7) \qquad \zeta_1 = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\psi + a_3\cos 3\psi + a_n\cos n\psi + \ldots$$

mit

$$(6.8)\qquad a_0 = \frac{c_0}{1-r},\quad a_1 = -\frac{c_1}{2r},\quad a_3 = \frac{3c_3}{2-3r-r^3},\quad a_n = \frac{c_n}{1-r}$$

im regulären Fall und für $r = r_n \neq r_3$

$$\text{bzw.}\quad a_3 = \frac{c_3}{1-r} \quad \text{für} \quad r = r_3 .$$

Somit erhalten wir für ζ in einer ersten Annäherung im regulären Fall

$$(6.9)\quad \zeta_1 = \frac{s}{1-r} - \frac{\lambda}{2r}\cos\psi + h\frac{r}{2(1+r)^2}\cos\psi - h\frac{r}{2-3r-r^3}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}\cos 3\psi + \ldots,$$

im singulären Fall $r = r_n \neq r_3$

$$(6.10)\quad \zeta_1 = \frac{s}{1-r} - \frac{\lambda}{2r}\cos\psi + h\frac{r}{2(1+r)^2}\cos\psi - h\frac{r}{2-3r-r^3}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}\cos 3\psi + w\cos n\psi + \ldots$$

und endlich für $r = r_3$

$$(6.11)\quad \zeta_1 = \frac{s}{1-r} - \frac{\lambda}{2r}\cos\psi + h\frac{r}{2(1+r)^2}\cos\psi + w\cos 3\psi - h\frac{r}{3(1-r)}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}\cos 3\psi + \ldots,$$

wobei die nicht mehr hingeschriebenen Glieder jedesmal bezüglich λ, w, h, s von mindestens zweiter Ordnung sind. Wird nunmehr der Ausdruck (6.9) für ζ in die Beziehungen (1.10) eingetragen, so findet man die Gleichungen der gesuchten Kurve S_1 in einer ersten Annäherung im regulären Fall.

§ 7.

Die Verzweigungsgleichung.

Im regulären Fall war das Problem mit Angabe der Lösung (5.13) erledigt. Für die singulären Fälle schließt sich als wesentlicher Punkt der Betrachtungen noch die Untersuchung der Verzweigungsgleichung (5.3) an, d. h. die Aufgabe, den bisher noch unbestimmt gelassenen kleinen Parameter w so zu bestimmen, daß die Gleichung (5.3) erfüllt ist. Zu diesem Zweck werde die Entwicklung (5.13) für ζ in die Verzweigungsgleichung (5.3) eingetragen und die durch gliedweise Integration entstehende, nach Potenzen von λ, w, h, s fortschreitende Entwicklung

$$(7.1)\qquad \sum B_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}\lambda^{\nu_0}w^{\nu_1}h^{\nu_2}s^{\nu_3} = 0, \quad \nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3 \geqq 1$$

mit

$$(7.2)\qquad B_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} = \int_0^{2\pi} a_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}(\psi')\cos n\psi' d\psi', \quad B_{0100} = 0$$

nach w aufgelöst. Augenscheinlich ist immer $B_{1000} = B_{0100} = B_{0001} = 0$ und außer für $r = r_3$ auch $B_{0010} = 0$. Demnach erweist sich zur Bestimmung des Parameters w die Kenntnis der Glieder von mindestens zweiter Ordnung als nötig.

Es ist nun um so bemerkenswerter, daß man in dem speziellen singulären Fall $n = 2$ grundsätzlich mit der Kenntnis der Glieder erster Ordnung bei der Diskussion der Verzweigungsgleichung auskommt. Freilich haben wir jetzt an die Stelle von w einen weiteren kleinen (gleichfalls zu Anfang noch unbestimmt gelassenen) Parameter $\boldsymbol{w}$ gemäß der Beziehung

$$\frac{\omega^2}{\pi k f} = r\frac{1-r}{1+r} + \boldsymbol{w} \tag{7.3}$$

einzuführen, was augenscheinlich, wie ein Blick auf die Gleichung (2.12) lehrt, eine geringfügige Abänderung in der Wahl des Achsenverhältnisses der zugrunde gelegten Ellipse bedeutet[20]). Wie man sich leicht überzeugt, erfährt nur die rechte Seite der Integro-Differentialgleichung (3.20) eine gewisse Abänderung, und zwar derart, daß in Π zu den Gliedern erster Ordnung noch der Ausdruck

$$\boldsymbol{w}\frac{1}{2}\frac{1+r}{1-r}\cos 2\psi \tag{7.4}$$

hinzukommt, wenn wir den auf S konstanten Term $\boldsymbol{w}\frac{1}{2}\frac{1+r}{1-r}$ in $\pi R_1 R_2 s$ mit hineinnehmen. Sonst tritt $\boldsymbol{w}$ nur noch in Gliedern höherer Ordnung auf.

Es möge nun $\boldsymbol{w}$ derart bestimmt werden, daß $w = 0$ wird. An Stelle von (5.3) haben wir jetzt die Verzweigungsgleichung

$$\int_0^{2\pi} \zeta' \cos 2\psi' \, d\psi' = 0, \tag{7.5}$$

in die für ζ' die zu (5.13) analoge Potenzentwicklung nach $\lambda, \boldsymbol{w}, h, s$ einzutragen ist. Für die Glieder erster Ordnung erhalten wir jetzt (vgl. (6.10))

$$\zeta_1 = \frac{s}{1-r} - \frac{\lambda}{2r}\cos\psi + h\frac{r}{2(1+r)^2}\cos\psi + \boldsymbol{w}\frac{1+r}{2(1-r)^2}\cos 2\psi - h\frac{r}{2-3r-r^3}\frac{1-r+r^2}{(1+r)^2}\cos 3\psi + \ldots \qquad (r = r_2 = \sqrt{2}-1). \tag{7.6}$$

Setzt man endlich diesen Ausdruck in (7.5) ein, so erkennt man, daß die Verzweigungsgleichung notwendig von der Form

$$\boldsymbol{w}\pi\frac{1+r}{2(1-r)^2} + \mathfrak{P}_1(\lambda, \boldsymbol{w}, h, s) = 0 \tag{7.7}$$

[20]) Offenbar hat jetzt der Koeffizient von X^2 in (2.1) gerade den Wert $\pi\boldsymbol{w}$. Die Einführung eines zu $\boldsymbol{w}$ analogen Parameters zu prinzipiell gleichem Zweck ist mit Erfolg zuerst von Herrn L. Lichtenstein in loc. cit. [3]) II. Abh. und III. Abh. vorgenommen worden.

ist, unter $\mathfrak{P}_1$ wie nachher unter $\mathfrak{P}_2$ mit mindestens quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihen in den kleinen Parametern verstanden. Nach bekannten Sätzen ist dann für hinreichend kleine Werte von $|w|$

$$w = \mathfrak{P}_2(\lambda, h, s) \tag{7.8}$$

eine eindeutige Funktion von λ, h, s.

Außer den zu $\bar{r}$ und $\overset{+}{r}$ gehörigen regulären Figuren gibt es also in der Nachbarschaft von $\mathring{S}$ keine neuen Gleichgewichtsfiguren. Damit ist zugleich die erste der zu Ende des § 5 bemerkten Lücken geschlossen.

§ 8.

Die Verzweigungsgleichung (Fortsetzung).

Nun zu den übrigen singulären Fällen $r = r_n$ mit $n > 2$! Ein Blick auf die Beziehungen (6.10), (6.11) und (7.4) lehrt, daß jetzt der Kunstgriff, der in der Einführung des weiteren Parameters w bestand, nicht mehr zu wesentlichen Erleichterungen führen kann. Vielmehr wird sich jetzt die Heranziehung von Gliedern höherer als der ersten Ordnung bei der Diskussion der Verzweigungsgleichung, die wir von nun an wieder in der Form (5.3) annehmen, nicht umgehen lassen.

Wegen der aus der Theorie der Integralgleichung folgenden Relation

$$\int_0^{2\pi} H(\psi, \psi') \cos n\psi' d\psi' = 0 \tag{8.1}$$

liefert die Formel (5.11) bei Vertauschung der Integrationsfolge

$$\int_0^{2\pi} \zeta_{i+1} \cos n\psi \, d\psi = \frac{1}{1-r} \int_0^{2\pi} \hat{I}(\zeta_i) \cos n\psi \, d\psi, \tag{8.2}$$

wobei hier und stets im folgenden unter r der singuläre Wert r_n zu verstehen ist. Aus (8.2) und (3.20) ergibt sich nun weiter die Verzweigungsgleichung in der Form

$$\int_0^{2\pi} \left[\mathsf{P}(\zeta) + \frac{1}{\pi R_1 R_2} h \, \hat{\mathfrak{G}}(X_1, Y_1) + \frac{1}{\pi R_1 R_2} \{U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots\} \right] \cos n\psi \, d\psi = 0. \tag{8.3}$$

Wir werden uns hier zunächst auf die Glieder zweiter Ordnung beschränken und für ζ die Glieder erster Ordnung der ersten Approximation ζ_1, d. h.

$$\begin{aligned} {}_1\zeta &= \frac{s}{1-r} - \frac{\lambda}{2r} \cos\psi + h \frac{r}{2(1+r)^2} \cos\psi - h \frac{r}{2-3r-r^3} \frac{1-r+r^2}{(1+r)^2} \cos 3\psi + w \cos n\psi \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\psi + a_3 \cos 3\psi + a_n \cos n\psi, \end{aligned} \tag{8.4}$$

eintragen, um die Koeffizienten $B_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}$ mit $\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3=2$ zu bestimmen.

Da, wie wir in § 9 sehen werden, der Ausdruck $U^{(3)}+U^{(4)}+\ldots$ nur aus Gliedern von dritter und höherer Ordnung besteht, ferner auch die Entwicklung $h\,\mathfrak{G}(X,Y)$ für $n>4$ gemäß (2.8) nur Beiträge dieser Art liefert, werden wir in (8.3) nur $U^{(2)}({}_1\zeta)$ und die Terme zweiter Ordnung aus $\mathsf{P}({}_1\zeta)$ und $h\,\mathfrak{G}(X_1,Y_1)-h\,\mathfrak{G}(X,Y)$ berücksichtigen,

$$\mathsf{P}({}_1\zeta)=\frac{1-r}{1+r}\frac{p^2}{R_1R_2}\,{}_1\zeta\,\lambda\cos\psi+r\frac{1-r}{1+r}\,{}_1\zeta^2\frac{p^4}{R_1^3R_2}\cos^2\psi+\ldots, \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned} &h\,\mathfrak{G}(X_1,Y_1) \\ &=h\,\mathfrak{G}(X,Y)-\pi r\frac{1-r}{1+r}h\,p^2\,{}_1\zeta\left[\frac{1+r+r^2}{(1+r)^2}\cos 3\psi+\frac{r}{(1+r)^2}\cos\psi\right]+\ldots \\ &=-\pi r^2\frac{1-r}{(1+r)^3}h\,p^2\,{}_1\zeta\cos\psi-\pi r(1-r)\frac{1+r+r^2}{(1+r)^3}h\,p^2\,{}_1\zeta\cos 3\psi+\ldots \end{aligned} \tag{8.6}$$

In der Bezeichnungsweise von § 9 gilt nun

$$U^{(2)}=\Delta_3+\Delta_5+2\Delta_6+\Delta_8, \tag{8.7}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned} \Delta_3&=\frac{1}{2R_1R_2}\int_0^{2\pi}\zeta'^2p'^4\log\frac{L}{\varrho}\,d\psi', \\ \Delta_5&=-\frac{R_1R_2}{2}\int_0^{2\pi}(p'\zeta')^2\frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2}\,d\psi', \qquad (\vartheta=\psi'-\psi), \\ 2\Delta_6&=-R_1R_2\,p^2\,\zeta\int_0^{2\pi}\zeta'\frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2}\,d\psi', \\ \Delta_8&=\frac{p^4\zeta^2}{2R_1R_2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2}\left[R_2^2\cos\psi'\cos\psi+R_1^2\sin\psi'\sin\psi\right]d\psi'. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Unter Benutzung der etwa auf dem Wege über das Komplexe gewonnenen Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2}&=\frac{(1+r)^2}{2R_1^2}\left[1-2r\cos\tau+r^2\right]^{-1} \\ &=\frac{1}{2R_1R_2}\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}r^m\cos m\tau\right] \qquad (\tau=\psi'+\psi) \end{aligned} \tag{8.9}$$

liefert die Auswertung des letzten Integrals

$$\Delta_8=p^4\zeta^2\frac{\pi r}{R^2}\cos^2\psi-p^2\zeta^2\frac{\pi r}{2}. \tag{8.10}$$

In ähnlicher Weise wie in § 4 ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsfolge

$$(8.11)\qquad \int_0^{2\pi} \Delta_3 \cos n\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2R_1R_2}(1-r)\int_0^{2\pi} \zeta'^2 p'^4 \cos n\psi'\, d\psi', \quad [21])$$

und weiter wegen (8.9)

$$(8.12)\qquad \int_0^{2\pi} \Delta_5 \cos n\psi\, d\psi = -\frac{\pi}{2} r^n \int_0^{2n} (p'\zeta')^2 \cos n\psi'\, d\psi'.$$

Endlich erhalten wir vermöge (8.4)

$$(8.13)\qquad \int_0^{2\pi} 2\Delta_6({}_1\zeta)\cos n\psi\, d\psi$$

$$= -\pi \int_0^{2\pi} p^2\, {}_1\zeta \left[\frac{a_0}{2} + a_1 r\cos\psi + a_3 r^3 \cos 3\psi + a_n r^n \cos n\psi\right] \cos n\psi\, d\psi.$$

Wegen der aus (1.9) folgenden Relation

$$(8.14)\qquad p^2 = R_2^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2} p^2 \cos^2\psi = R_1 R_2 \left[\frac{1-r}{1+r} + \frac{4r}{1-r^2}\frac{p^2}{R_1^2}\cos^2\psi\right]$$

können wir für (8.11) jetzt auch schreiben

$$(8.15)\qquad \int_0^{2\pi} \Delta_3 \cos n\psi\, d\psi$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{(1-r)^2}{1+r}\int_0^{2\pi} \zeta^2 p^2 \cos n\psi\, d\psi + \frac{2\pi r}{1+r}\int_0^{2\pi} \zeta^2 \frac{p^4}{R_1^2}\cos^2\psi \cos n\psi\, d\psi.$$

Alles in allem bekommen wir schließlich

$$(8.16)\qquad \frac{1}{\pi R_1 R_2}\int_0^{2\pi} U^{(2)}({}_1\zeta)\cos n\psi\, d\psi$$

$$= r\frac{3+r}{1+r}\int_0^{2\pi} {}_1\zeta^2 \frac{p^4}{R_1^3 R_2}\cos^2\psi\cos n\psi\, d\psi - \frac{1}{2}(n+nr-2)\frac{1-r}{1+r}\int_0^{2\pi} \frac{p^2}{R_1 R_2}\, {}_1\zeta^2 \cos n\psi\, d\psi$$

$$-\int_0^{2\pi} \frac{p^2}{R_1 R_2}\, {}_1\zeta \left[\frac{a_0}{2} + a_1 r\cos\psi + a_3 r^3\cos 3\psi + a_n r^n \cos n\psi\right]\cos n\psi\, d\psi.$$

[21]) Man vergleiche in diesem Zusammenhang auch die Formel (2.17) des dritten Teiles.

Somit erhält der Ausdruck (8.3) nach leichten Umformungen die Gestalt

$$(8.17)\quad \frac{4r}{1+r}\int_0^{2\pi} {}_1\zeta^2 \frac{p^4}{R_1^3 R_2}\cos^2\psi\cos n\psi\, d\psi - \frac{1}{2}(n+nr-2)\frac{1-r}{1+r}\int_0^{2\pi}\frac{p^2}{R_1 R_2}\,{}_1\zeta^2\cos n\psi\, d\psi$$
$$-\int_0^{2\pi}\frac{p^2}{R_1 R_2}\,{}_1\zeta\left[\frac{a_0}{2}+b_1\cos\psi+b_3\cos 3\psi+a_n r^n\cos n\psi\right]\cos n\psi\, d\psi \equiv J_1+J_2+J_3$$

mit

$$(8.18)\qquad b_1=\frac{3-r}{1+r}r\,a_1,\qquad b_3=\left[r^3-\frac{1-r^3}{1+r^3}(2-3r-r^3)\right]a_3,$$

ferner die Integralausdrücke von (8.17) der Reihe nach mit J_1, J_2, J_3 bezeichnet.

Mit Rücksicht auf (1.9) gilt die Beziehung

$$(8.19)\qquad p^2=\frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2\cos^2\psi+R_1^2\sin^2\psi}=\frac{R_2^2(1+r)^2}{1-2r\cos 2\psi+r^2},$$

aus der sich mit Hilfe der Relation (8.9) die beiden für die Auswertung der in (8.17) auftretenden Integrale nützlichen Entwicklungen

$$(8.20)\qquad \frac{p^2}{R_1R_2}=1+2\sum_{m=1}^{\infty}r^m\cos 2m\psi,\qquad (0<r<r^*<1),$$

$$(8.21)\quad \frac{p^4}{R_1^3R_2}\cos^2\psi=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\{2r+(1-r^2)m\}r^{m-1}\cos 2m\psi\right.$$

ergeben.

Für die folgenden Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, die Fälle $n\equiv 0\pmod 2$ und $n\equiv 1\pmod 2$ getrennt zu behandeln.

Es sei zunächst n gerade. Im Hinblick auf den Umstand, daß die in (8.20) und (8.21) angeschriebenen Reihen lediglich nach geraden Vielfachen der exzentrischen Anomalie fortschreiten, erkennen wir, daß zu J_1 und J_2 nur diejenigen Terme des Polynoms ${}_1\zeta^2\cos n\psi$ einen Beitrag liefern, die zu einem Kosinus von geraden Multipla von ψ Anlaß geben. Infolgedessen sind schon in ${}_1\zeta^2$ nur die Glieder

$$(8.22)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2+a_3^2+a_n^2\right)+\left(\frac{a_1^2}{2}+a_1a_3\right)\cos 2\psi+a_1a_3\cos 4\psi$$
$$+\frac{a_3^2}{2}\cos 6\psi+a_0a_n\cos n\psi+\frac{a_n^2}{2}\cos 2n\psi,$$

mithin in dem Ausdruck ${}_1\zeta^2\cos n\psi$ die Glieder

$$(8.23)\quad \frac{1}{2}\left[a_0a_n+\left(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2+a_3^2+\frac{3a_n^2}{2}\right)\cos n\psi\right.$$
$$+\left(\frac{a_1^2}{2}+a_1a_3\right)\{\cos(n-2)\psi+\cos(n-2)\psi\}+a_1a_3\{\cos(n+4)\psi+\cos(n-4)\psi\}$$
$$\left.+\frac{a_3^2}{2}\{\cos(n+6)\psi+\cos(n-6)\psi\}+a_0a_n\cos 2n\psi+\frac{a_n^2}{2}\cos 3n\psi\right]$$

zu berücksichtigen. In entsprechender Weise liefern in dem Ausdruck

$$_1\zeta\left[\frac{a_0}{2}+b_1\cos\psi+b_3\cos 3\psi+a_n r^n\cos n\psi\right]\cos n\psi$$

nur die Terme

$$\begin{aligned}(8.24)\quad &\frac{1}{4}[a_0 a_n(1+r^n)+(a_0^2+2a_1 b_1+2a_3 b_3+3a_n^2 r^n)\cos n\psi\\ &+(a_1 b_1+a_3 b_1+a_1 b_3)\{\cos(n+2)\psi+\cos(n-2)\psi\}\\ &+(a_3 b_1+a_1 b_3)\{\cos(n+4)\psi+\cos(n-4)\psi\}\\ &+a_3 b_3\{\cos(n+6)\psi+\cos(n-6)\psi\}\\ &+a_0 a_n(1+r^n)\cos 2n\psi+a_n^2 r^n\cos 3n\psi]\end{aligned}$$

Beiträge zu J_3.

Jetzt können wir, wie ein Blick auf (8.4) lehrt, schon feststellen, daß die Koeffizienten von λs, λw, $w h$, $h s$ in der Verzweigungsgleichung sämtlich verschwinden müssen. Es bleiben noch die Koeffizienten von w^2, λ^2, h^2, s^2, λh, $w s$ zu bestimmen.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (8.23) und (8.24) in (8.17) erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned}(8.25)\quad J_3=&-\frac{\pi}{2}a_0 a_n n(1-r)^2\frac{n+nr-2}{1+r}-\frac{\pi}{2}r^{\frac{n}{2}}\frac{1-r}{1+r}\frac{n+nr-2}{2}\Big[a_0^2+a_1^2\frac{(1+r)^2}{r}\\ &+a_3^2\frac{(1+r^3)^2}{r^3}+a_n^2(2-n-nr)+2a_1 a_3\Big(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}+r+r^2\Big)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8.26)\quad J_3=&-\frac{\pi}{2}a_0 a_n n^2(1-r)^2-\frac{\pi}{2}r^{\frac{n}{2}}\Big[a_0^2+a_1 b_1\frac{(1+r)^2}{r}+a_3 b_3\frac{(1+r^3)^2}{r^3}\\ &+a_n^2(n-nr-1)(2+n-nr)+(a_1 b_3+a_3 b_1)\Big(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}+r+r^2\Big)\Big].\end{aligned}$$

Fassen wir zusammen, so finden wir nach leichten Umformungen

$$\begin{aligned}(8.27)\quad J_2+J_3=&-\pi a_0 a_n n\frac{(1-r)^2}{1+r}(n+nr-1)-\frac{\pi}{4}r^{\frac{n}{2}}\Big[a_0^2\frac{1}{1+r}\{4r+n(1-r^2)\}\\ &+a_1^2\frac{1+r}{r}\{4r+n(1-r^2)-2(1-r)^2\}\\ &+a_3^2\frac{1+r^3}{r^3}[\{4r+n(1-r^2)\}\{1-r+r^2\}-6(1-r)(1-r^3)]\\ &+a_n^2\frac{3+r^n}{1+r}\{-4+3n(1-r^2)\}\\ &+2a_1 a_3\frac{1}{r^2}[\{4r+n(1-r^2)\}(1+r^3)-2(1+r)(1-r)^2(2r^2+r+2)]\Big].\end{aligned}$$

Wie man sich ohne Mühe überzeugt, erhält man für J_1

$$(8.28)\quad J_1 = \pi a_0 a_n n \frac{(1-r)^2}{1+r}(n+nr-1) + \frac{\pi}{4} r^{\frac{n}{2}} \Big[a_0^2 \frac{1}{1+r}\{4r + n(1-r^2)\}$$
$$+ a_1^2 \frac{1+r}{r}\{4r + n(1-r^2) - 2(1-r)^2\}$$
$$+ a_3^2 \frac{1+r^3}{r^3}[\{4r + n(1-r^2)\}\{1-r+r^2\} - 6(1-r)(1-r^3)]$$
$$+ a_n^2 \frac{3+r^n}{1+r}\{-4 + 3n(1-r^2)\} + 2a_n^2(3-r^n)$$
$$+ 2a_1 a_3 \frac{1}{r^2}[\{4r + n(1-r^2)\}(1+r^3) - 2(1+r)(1-r)^2(2r^2+r+2)]\Big].$$

Augenscheinlich verschwinden in (8.17) die Koeffizienten von $a_0 a_n$, a_0^2, a_1^2, a_3^2 und $a_1 a_3$, so daß in der Verzweigungsgleichung als einziges (in den Parametern s, λ, h, w) quadratisches Glied nur das mit w^2 behaftete auftritt. Gemäß (8.4) und (8.27), (8.28) lautet der Koeffizient von w^2

$$(8.29)\qquad \frac{\pi}{2} r^{\frac{n}{2}}(3 - r^n),$$

wegen $0 < r < 1$ ist er positiv und gewiß von Null verschieden.

Wir nehmen jetzt zunächst $s = 0$, $\lambda = 0$ an. Es bestehen nun zwei Möglichkeiten: entweder tritt w bei allen Gliedern der Verzweigungsgleichung als gemeinsamer Faktor auf oder nicht. Im ersten Fall wäre mindestens $w = 0$ eine Lösung. Im zweiten Fall sei $\mathfrak{A} h^j$ das erste w nicht enthaltende Gied in der Entwicklung von (8.3). Dann gilt

$$(8.30)\qquad w = (-\mathfrak{A} h^j)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

und wir erhalten, falls $\mathfrak{A} < 0$ ist, an der Stelle $r = r_n$ zwei reelle Werte von w, d. h. zwei Gleichgewichtsfiguren (bei festem h), die beide für $h \to 0$ in die Rochesche Ellipse übergehen.

Der Fall $r = r_4$, den wir oben zunächst ausschlossen, weist einige Besonderheiten auf. Zwar bleiben im großen ganzen die vorausgegangenen Ausführungen auch jetzt noch gültig, doch muß nunmehr in (8.3) noch das aus der Entwicklung von $h\mathfrak{H}(X, Y)$ herrührende Glied $\frac{r(1+r^4)}{(1+r)^4}\frac{h^2}{4}\cos 4\psi$ berücksichtigt werden. Daher ist jetzt die Verzweigungsgleichung von der Form

$$(8.31)\qquad A_{00} h^2 + A_{11} w^2 + \ldots = 0 \qquad (A_{00} > 0,\ A_{11} > 0),$$

und es gilt demzufolge

$$(8.32)\qquad w = \begin{cases} +\sqrt{\frac{A_{00}}{A_{11}}}\, h + \mathfrak{P}^{(1)}(h), \\ -\sqrt{\frac{A_{00}}{A_{11}}}\, h + \mathfrak{P}^{(2)}(h). \end{cases}$$

Wir erhalten demnach im Fall $n = 4$ genau zwei Gleichgewichtsfiguren, die für $h = 0$ in die zugehörige Rochesche Ellipse übergehen.

Betrachtungen, die den vorstehenden Ausführungen analog sind, führen, wenn wieder $s = 0$ gesetzt wird, im Fall ungerader $n > 3$ zu dem Ergebnis

$$B_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} = 0 \quad \text{für} \quad \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 2 \tag{8.33}$$
$$(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3 = 0, 1, 2),$$

das uns noch weniger sagt als im Fall gerader n.

Die eingehendere Diskussion der Verzweigungsgleichung, die hier trotz Heranziehung der Glieder zweiter Ordnung noch unvollständig geblieben ist, sei späterer Behandlung vorbehalten. Auch die Frage, ob sich die regulären Figuren über die singulären Stellen hinweg (bezüglich r) zu linearen Reihen zusammenschließen, müssen wir unbeantwortet lassen. Wir wissen nur, daß für $n = 4$ und $h \neq 0$ zwei Gleichgewichtsfiguren existieren, und aus § 7, daß in $\dot{S}$ die beiden linearen Reihen regulärer Figuren zusammenhängen, ohne daß für $n = 2$ neue Verzweigungen vorkommen.

§ 9.

Anhang. Die Entwicklung für $V_1(X_1, Y_1) - V(X, Y)$.

Die Herleitung einer Reihenentwicklung für die Differenz der Potentiale V_1 und V ist aus den Untersuchungen über räumliche Gleichgewichtsfiguren her bekannt[22]). Eine analoge, für das vorliegende ebene Problem brauchbare Entwicklung ergibt sich ohne weiteres, wenn man jene Betrachtungen in die Sprache des Zweidimensionalen übersetzt, wobei an die Stelle des Newtonschen nunmehr das logarithmische Potential zu treten hat[23]).

Zwischen die Kurven S und S_1 wird eine einparametrige Kurvenschar S_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ durch die Festsetzung eingeschaltet, daß der Durchstoßpunkt P_t der in P auf S errichteten Außennormale (ν) durch die Kurve S_t die krummlinigen Koordinaten $(\psi, tp\zeta)$ habe. Seine kartesischen Koordinaten lauten alsdann

$$X_t = X + tap\zeta, \qquad Y_t = Y + tbp\zeta. \tag{9.1}$$

Man erhält also die Kurve S_t, wenn man bei festem t die exzentrische Anomalie ψ ihren Wertbereich $\langle 0, 2\pi \rangle$ durchlaufen läßt. Das von S_t umschlossene Gebiet T_t sei mit homogener Masse der Dichte 1 belegt. Wir

---

[22]) Siehe L. Lichtenstein, loc. cit. [7]), insbes. II. Abhandlung, S. 140 ff. Entsprechende Anwendungen findet diese Entwicklung in den unter [8]) angeführten Abhandlungen.

[23]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [8]), III. Abhandlung, wo bereits bei der Betrachtung ringförmiger Gleichgewichtsfiguren die entsprechende Entwicklung prinzipiell in die Ebene übertragen wird, jedoch nur die Glieder erster Ordnung explizit angegeben werden.

bezeichnen das logarithmische Potential dieser ebenen Massenbelegung in dem auf S_t selbst gelegenen Punkte $(\psi, t\,p\,\zeta)$ mit $U_t(\psi)$.

Analog zu den Betrachtungen im Raume gewinnen wir für die Differenz $V_1(X_1, Y_1) - V(X, Y) = U_1(\psi) - U(\psi)$ eine Darstellung in Form einer für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{d\zeta}{d\psi}\right|$ absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe

$$(9.2)\qquad U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots, \qquad U^{(n)} = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n}\right]_{t=0} = \int_S \frac{1}{\varrho^{n-1}} K^{(n)}\, d\sigma$$

Hierbei ist, unter ϱ_t den Abstand der beiden auf S_t gelegenen Punkte P_t und P_t' verstanden,

$$(9.3)\qquad \frac{1}{\varrho^{n-1}} K^{(n)} = \frac{1}{n!}\,\frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \sum (a'\,p'\,\zeta' - a\,p\,\zeta) \times \left\{ A_t' \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\log \frac{L}{\varrho\, t}\right) - \binom{n-1}{1} \frac{\partial A_t'}{\partial t}\,\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\left(\log \frac{L}{\varrho\, t}\right)\right\}_{t=0},$$

wobei das Summenzeichen die Symmetrie des Ausdruckes $\frac{1}{\varrho^{n-1}} K^{(n)}$ bezüglich a, a', A_t'; b, b', B_t' zum Ausdruck bringt. Es gilt nun weiter

$$d\sigma_t' = d\psi' \sqrt{A_t'^2 + B_t'^2}, \qquad d\sigma' = \frac{R_1 R_2}{p'}\, d\psi',$$

$$A_t' = \frac{\partial (Y' + b'\,t\,p'\,\zeta')}{\partial \psi'} = A' + t\,\frac{\partial A_t'}{\partial t}, \qquad A' = \frac{dY'}{d\psi'} = R_2 \cos\psi',$$

$$B_t' = -\frac{\partial (X' + a'\,t\,p'\,\zeta')}{\partial \psi'} = B' + t\,\frac{\partial B_t'}{\partial t}, \qquad B' = -\frac{dX'}{d\psi'} = R_1 \sin\psi',$$

$$\frac{\partial A_t'}{\partial t} = \frac{d}{d\psi'}(b'\,p'\,\zeta') = \frac{1}{R_2}\,\frac{d}{d\psi'}(p'^2\,\zeta' \sin\psi'),$$

$$(9.4)\qquad \frac{\partial B_t'}{\partial t} = -\frac{d}{d\psi'}(a'\,p'\,\zeta') = -\frac{1}{R_1}\,\frac{d}{d\psi'}(p'^2\,\zeta' \cos\psi'),$$

$$a'A_t' + b'B_t' = a'A' + b'B' + t\left(a'\frac{\partial A_t'}{\partial t} + b'\frac{\partial B_t'}{\partial t}\right),$$

$$a\,A_t' + b\,B_t' = a\,A' + b\,B' + t\left(a\,\frac{\partial A_t'}{\partial t} + b\,\frac{\partial B_t'}{\partial t}\right),$$

$$a'A' + b'B' = \frac{R_1 R_2}{p'} = \frac{d\sigma'}{d\psi'}, \qquad a'\frac{\partial A_t'}{\partial t} + b'\frac{\partial B_t'}{\partial t} = \frac{p'^3 \zeta'}{R_1 R_2},$$

$$a\,A' + b\,B' = \frac{p}{R_1 R_2}\left[R_2^2 \cos\psi \cos\psi' + R_1^2 \sin\psi \sin\psi'\right],$$

$$a\,\frac{\partial A_t'}{\partial t} + b\,\frac{\partial B_t'}{\partial t} = \frac{p}{R_1 R_2}\,\frac{d\,(p'^2 \zeta' \sin\vartheta)}{d\psi'}.$$

Wie man sich durch Einsetzen der in (9.4) angeschriebenen Terme in (9.3) bzw. (9.2) überzeugt, zerfällt $\frac{\partial U_t}{\partial t}$, von Gliedern höherer als der

ersten Ordnung in t abgesehen, additiv in folgende Bestandteile:

$$\Delta_1 = \int_S p'\zeta' \log \frac{L}{\varrho}\, d\sigma', \qquad \Delta_2 = -\frac{p^2\zeta}{R_1 R_2} \int_0^{2\pi} [R_2^2 \cos\psi \cos\psi' + R_1^2 \sin\psi \sin\psi'] \log \frac{L}{\varrho}\, d\psi',$$

$$2t\Delta_3 = t \frac{1}{R_1 R_2} \int_0^{2\pi} (p'^2\zeta')^2 \log \frac{L}{\varrho}\, d\psi', \qquad 2t\Delta_4 = -t \frac{p^2\zeta}{R_1 R_2} \int_0^{2\pi} \frac{d(p'^2\zeta' \sin\vartheta)}{d\psi'} \log \frac{L}{\varrho}\, d\psi',$$

$$2t\Delta_5 = -t R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2} (p'\zeta')^2\, d\psi', \qquad 2t\Delta_6 = -t R_1 R_2 p^2 \zeta \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2} \zeta'\, d\psi',$$

$$2t\Delta_7 = t \frac{p^2\zeta}{R_1 R_2} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2} p'^2\zeta' [R_2^2 \cos\psi \cos\psi' + R_1^2 \sin\psi \sin\psi']\, d\psi',$$

$$2t\Delta_8 = t \frac{p^4\zeta^2}{R_1 R_2} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\vartheta}{\varrho^2} [R_2^2 \cos\psi \cos\psi' + R_1^2 \sin\psi \sin\psi']\, d\psi'.$$

Die Ausdrücke Δ_1, Δ_2 sind die einzigen, die lineare Terme, die Ausdrücke $\Delta_3, \Delta_4, \ldots, \Delta_8$ die einzigen, die quadratische Glieder in bezug auf $\zeta, \zeta', \frac{d\zeta'}{d\psi'}$ enthalten.

Insbesondere gilt

$$U^{(1)} = \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]_{t=0} = p\zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V + \int_S p'\zeta' \log \frac{L}{\varrho}\, d\sigma'. \tag{9.6}$$

Weiter wird wegen

$$(\sin\vartheta) \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\psi'} = (1-\cos\vartheta) \frac{R_1^2 R_2^2}{p'^2} \frac{1}{\varrho^2} + \frac{(1-\cos\vartheta)}{\varrho^2} [R_2^2 \cos^2\psi' \cos\psi + R_1^2 \sin^2\psi' \sin\psi]$$

und infolge einer teilweisen Integration

$$\Delta_4 = \Delta_6 - \Delta_7, \tag{9.8}$$

mithin

$$U^{(2)} = \Delta_3 + \Delta_5 + 2\Delta_6 + \Delta_8. \tag{9.9}$$

Zweiter Teil.

Das räumliche Problem [24]).

§ 1.

Problemstellung.

Im folgenden werde die Lage der Punkte des Raumes auf ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem (x_0, y_0, z_0) bezogen, in dessen Ursprung

[24]) Die Bezeichnungsweise dieses Teiles weicht an mehreren Stellen von der jenigen des ersten Teiles ab.

sich die punktförmige Masse M befinde. Der Punkt O mit den Koordinaten $x_0 = L$ $(L > 0)$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ sei Ursprung eines neuen, durch die Beziehungen

$$x_0 = x + L, \quad y_0 = y, \quad z_0 = z \tag{1.1}$$

mit dem früheren System verknüpften, gleichfalls rechtwinkligen Koordinatensystems (x, y, z) und zugleich Mittelpunkt eines Ellipsoidkörpers T, dessen Oberfläche S durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.2}$$

definiert sein möge. Unter P ein auf S gelegener Punkt mit den Koordinaten X, Y, Z verstanden, bezeichne (ν) die in P zu S errichtete Außennormale. Ihre Richtungskosinus α, β, γ haben die Werte

$$\alpha = \frac{X}{a^2}\, p, \quad \beta = \frac{Y}{b^2}\, p, \quad \gamma = \frac{Z}{c^2}\, p, \tag{1.3}$$

wobei

$$p = \left[\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

den Abstand der in P an S gelegten Tangentialebene von O angibt.

Wir denken uns jetzt den Ellipsoidkörper T, mit homogener, gravitierender, inkompressibler Flüssigkeitsmasse der Dichte f erfüllt, mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig wie ein starrer Körper um die z_0-Achse rotieren.

Annäherungsrechnungen führten Roche[25]) zu dem Resultat, daß sich das System M, T für geeignet gewählte Werte der Achsenverhältnisse und der Winkelgeschwindigkeit nahezu im Zustand relativen Gleichgewichts befindet, sofern nur die Ausmaße des Ellipsoids genügend klein angenommen werden.

Wie sind aber Achsenverhältnis und Winkelgeschwindigkeit „in geeigneter Weise“ zu bestimmen?

Dazu bemerken wir, daß die auf T einwirkenden Kräfte von der Eigengravitation, der Zentrifugalkraft und der Attraktion der Zentralmasse M herrühren. Wird also unter $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante, unter $\varkappa f V(x, y, z)$ das Newtonsche Potential des Ellipsoidkörpers T, unter $\varkappa f G(x, y, z)$ das von der Anziehung der Zentralmasse M herrührende Newtonsche Potential jeweils im Punkte (x, y, z) verstanden und endlich

---

[25]) É. Roche, Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné, Mémoires de l'Académie de Montpellier (Section des Sciences) 1849, 1850, 1851, **1**, S. 243 u. 333, **2**, S. 21.

unter $\Psi(x, y, z)$ eine passende Korrektionsfunktion, so wird in einem Punkt X, Y, Z auf S nach Roche

$$(1.5)\quad V(X,Y,Z)+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}[(L+X)^2+Y^2]+G(X,Y,Z)=s_0+\Psi(X,Y,Z)$$
$$(s_0 \text{ konstant})$$

sein. Wie im ebenen Fall werden wir zeigen, daß bei geeigneter Wahl der Achsenverhältnisse und der Winkelgeschwindigkeit die Korrektionsfunktion Ψ mit den Ausmaßen des Ellipsoids beliebig klein wird.

Das Newtonsche Potential eines homogen mit Masse der Dichte 1 erfüllten Ellipsoidkörpers ist im Innern und auf der Oberfläche bekanntlich von der Form

$$(1.6)\qquad V(X,Y,Z)=D-AX^2-BY^2-CZ^2,$$

unter D, A, B, C wohlbestimmte positive Konstante verstanden.

Das Potential $G(X, Y, Z)$ läßt sich für hinreichend kleine Werte von $h=\frac{a}{L}$, etwa

$$(1.7)\qquad h\leqq h^*,$$

nach Potenzen von h entwickeln:

$$(1.8)\quad G(X,Y,Z)=\frac{M}{f}[(L+X)^2+Y^2+Z^2]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{M}{2fL^3}[2L^2-2XL-(Y^2+Z^2-2X^2)+a^2O(h)].$$

Durch Elimination von Z^2 gemäß (1.2) wird

$$(1.9)\quad V(X,Y,Z)=D-Cc^2+\left(C\frac{c^2}{a^2}-A\right)X^2+\left(C\frac{c^2}{b^2}-B\right)Y^2,$$

$$G(X,Y,Z)=\frac{M}{2fL^3}\left[2L^2-c^2-2XL+\left(2+\frac{c^2}{a^2}\right)X^2+\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)Y^2+a^2O(h)\right].$$

Die Beziehung (1.5) geht nunmehr über in

$$D-Cc^2+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}L^2+\frac{M}{2fL^3}(2L^2-c^2)-s_0+\left[\frac{\omega^2}{\varkappa f}L-\frac{M}{fL^2}\right]X$$
$$(1.11)\qquad +\left[C\frac{c^2}{a^2}-A+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}+\frac{M}{2fL^3}\left(2+\frac{c^2}{a^2}\right)\right]X^2$$
$$+\left[C\frac{c^2}{b^2}-B+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}+\frac{M}{2fL^3}\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)\right]Y^2+\frac{M}{fL^3}a^2O(h)=\Psi(X,Y,Z).$$

Treffen wir jetzt der Reihe nach über die Konstante s_0, die Winkelgeschwindigkeit und die Achsenverhältnisse des Ellipsoides die Festsetzungen

$$(1.12)\qquad D-Cc^2+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}L^2+\frac{M}{2fL^3}(2L^2-c^2)=s_0,$$

$$\frac{\omega^2}{\varkappa f} = \frac{M}{f L^3}, \tag{1.13}$$

$$C\frac{c^2}{a^2} - A + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\left(2 + \frac{c^2}{a^2}\right) = 0, \tag{1.14}$$

$$C\frac{c^2}{b^2} - B + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) = 0, \tag{1.15}$$

so folgt aus (1.11) unmittelbar

$$\Psi(X, Y, Z) = \frac{M}{fL^3} a^2 O(h), \tag{1.16}$$

d. h. die Korrektionsfunktion Ψ läßt sich mit dem Parameter h, mithin, wenn die Entfernung L fest angenommen wird, mit den Ausmaßen des Ellipsoids beliebig klein machen.

Der in (1.13) angeschriebene Wert der Winkelgeschwindigkeit stimmt mit dem durch das Keplersche Gesetz bestimmten überein.

Da sich die Diskussion der beiden transzendenten Gleichungen (1.14), (1.15), die derjenigen der entsprechenden Gleichungen im Fall der Jacobischen Ellipsoide analog verläuft, schon anderenorts durchgeführt findet[26]), begnügen wir uns hier mit einer kurzen Mitteilung der Ergebnisse[27]): Es gibt eine wohlbestimmte Zahl $\mathring{\omega} > 0$ derart, daß zu jedem Wert $\omega < \mathring{\omega}$ genau zwei voneinander verschiedene dreiachsige $(a > b > c)$ Ellipsoide, ein schwächer abgeplattetes $\bar{S}$ und ein stärker abgeplattetes $\overset{+}{S}$ gehören. Dem Wert $\omega = \mathring{\omega}$ entspricht ein mäßig abgeplattetes Ellipsoid $\mathring{S}$. Die Ellipsoide $\overset{+}{S}$ und $\bar{S}$ schließen sich je zu einer von ω (bzw. L) abhängenden stetigen Schar zusammen, sie bilden zwei in dem Ellipsoid $\mathring{S}$ zusammenhängende lineare Reihen von angenäherten Gleichgewichtsfiguren. Für sehr kleine Werte von ω (bzw. sehr große Werte der Entfernung L von der Zentralmasse) erhält man in der Reihe der $\bar{S}$ nahezu eine Kugel, in der Reihe der $\overset{+}{S}$ nahezu eine sehr dünne Nadel. Läßt man jetzt ω monoton wachsen (bzw. die Distanz L immer kleiner und kleiner werden), so nimmt in der Reihe der schwächer abgeplatteten Ellipsoide $\bar{S}$ die Abplattung immer mehr und mehr zu, in der Reihe der stärker abgeplatteten Ellipsoide $\overset{+}{S}$ mehr und mehr ab.

Um die Rocheschen Gleichgewichtsfiguren in exakter Form zu gewinnen und vor allem die noch offene Frage, ob überhaupt und an welchen Stellen von den Rocheschen Ellipsoiden neue Gleichgewichtsfiguren abzweigen, in Angriff zu nehmen, ändern wir die bisherige Problemstellung in folgender,

[26]) Vgl. Tisserand, Mécanique céleste 2, Chapitre VIII, S. 110.

[27]) Es sei an dieser Stelle an die etwas weniger präzisierte Darstellung zu Beginn der Einleitung erinnert.

offenbar unwesentlicher Weise ab: An die Stelle des früheren vollständigen Außenfeldes $G(X, Y, Z)$ trete jetzt das Fremdfeld

$$(1.17) \qquad \mathfrak{G}(x, y, z) = \frac{M}{2fL^3}[2L^2 - 2xL - (y^2 + z^2 - 2x^2)].$$

Augenscheinlich stellt $\mathfrak{G}$ die Anfangsglieder der Entwicklung von $G(x, y, z)$ dar. Durch Hinzunahme eines passenden, von dem Parameter h abhängenden Zusatzfeldes $\varkappa f h \hat{\mathfrak{G}}(x, y, z; h) = \frac{\varkappa M}{2L^3} a^2 \cdot O(h)$ gelangt man dann leicht zu der ursprünglichen Fragestellung zurück.

Wir wollen nun feststellen, *ob es in der Nachbarschaft erster Ordnnug von S geschlossene Flächen S_1 mit stetiger Normale gibt, die für eine hinreichend wenig von ω verschiedene Winkelgeschwindigkeit ω_1 bei Einwirkung des Außenfeldes* (1.17) *Gleichgewichtsfiguren umschließen.*

Es sei S_1 eine solche Fläche in einer Nachbarschaft erster Ordnung von S. Die Normale (ν) bestimmt auf S_1 einen einzigen Durchstoßpunkt $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$. Bezeichnet ζ [28]) die nach außen positiv zu zählende Strecke $\overrightarrow{PP_1}$, so gilt

$$(1.19) \qquad X_1 = X + \alpha\zeta, \qquad Y_1 = Y + \beta\zeta, \qquad Z_1 = Z + \gamma\zeta.$$

Wird die Fläche S auf ein passendes System Gaußscher Parameter (ξ, η) bezogen, so läßt sich die Lage der auf S_1 gelegenen Punkte für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, etwa

$$(1.20) \qquad |\zeta| < \varepsilon^*,$$

durch die krummlinigen Koordinaten $(\xi, \eta; \zeta)$ charakterisieren. Die Funktion $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ kann mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung begabt vorausgesetzt werden.

Wir denken uns jetzt das von S_1 umschlossene Gebiet T_1, wie zuvor T mit homogener Flüssigkeitsmasse der Dichte f erfüllt. Der Flüssigkeitskörper T_1 rotiere unter Einwirkung des Außenfeldes (1.17) wie ein starrer Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die z_0-Achse. Bezeichnet $\varkappa f V_1(x, y, z)$ das Newtonsche Potential von T_1 im Punkte (x, y, z), so muß auf S

$$(1.21) \qquad V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}[(L + X_1)^2 + Y_1^2] + \mathfrak{G}(X_1, Y_1, Z_1) = s_1 \qquad (s_1 \text{ konstant})$$

sein. Diese für das relative Gleichgewicht notwendige Bedingung ist dafür auch zugleich hinreichend.

---

[28]) Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß diese Strecke ζ der im ersten Teil mit $p\zeta$ bezeichneten völlig entspricht.

§ 6.

Aufstellung der Integro-Differentialgleichung.

Aus der Beziehung (1.21) die Definitionsgleichung der Fläche S_1, die von ω_1 stetig abhängen soll, in der Form

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta; \omega_1) \tag{2.1}$$

zu gewinnen, werde zunächst für die Differenz $V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z)$ eine im wesentlichen nach aufsteigenden Potenzen von ζ geordnete Entwicklung angegeben.

Unter (ξ, η, ζ) bzw. (ξ, η) der Punkt (X_1, Y_1, Z_1) auf S_1 bzw. der Punkt (X, Y, Z) auf S verstanden, setzen wir

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) = U_1(\xi, \eta), \qquad V(X, Y, Z) = U(\xi, \eta). \tag{2.2}$$

Dann läßt sich für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{d\xi}\right|, \left|\frac{d\zeta}{d\eta}\right|$, etwa für

$$|\zeta|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right| \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon^*, \tag{2.3}$$

die Differenz $V_1 - V$ in Form einer unbedingt und gleichmäßig konvergenten Reihe

$$U_1 - U = \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)} \tag{2.4}$$

darstellen[29]). Hierbei ist speziell

$$U^{(1)} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} U(\xi, \eta) + \int_S \frac{1}{\varrho}\, \zeta'\, d\sigma', \tag{2.5}$$

wenn

$$\varrho = [(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

den Abstand der beiden auf S gelegenen Punkte P und P',

$$d\sigma' = d\xi'\, d\eta' \sqrt{\bar{A}'^2 + \bar{B}'^2 + \bar{C}'^2}; \tag{2.7}$$

$$\bar{A}' = \frac{\partial(Y', Z')}{\partial(\xi', \eta')}, \qquad \bar{B}' = \frac{\partial(Z', X')}{\partial(\xi', \eta')}, \qquad \bar{C}' = \frac{\partial(X', Y')}{\partial(\xi', \eta')}$$

das zu P' gehörige Flächenelement auf S bezeichnet. Für $n > 1$ gilt

$$U^{(n)} = \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)}\, d\sigma',$$

$$\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \sum{}' (\alpha'\zeta' - \alpha\zeta) \left\{ \bar{A}_t' \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right. \tag{2.8}$$

$$\left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial \bar{A}_t'}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 \bar{A}_t'}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(\frac{1}{\varrho_t}\right) \right\}_{t=0}$$ [30])

---

[29]) Man vgl. z. B. loc. cit. [7]) II, S. 140 ff.

[30]) Das Summenzeichen drückt hier die Symmetrie des Ausdruckes $\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)}$ hinsichtlich $\alpha, \alpha', \bar{A}_t', \frac{\partial \bar{A}_t'}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{A}_t}{\partial t^2}$; $\beta, \beta', \ldots$; $\ldots \frac{\partial^2 \bar{C}_t}{\partial t^2}$ aus.

mit

$$A_t' = \frac{\partial(X'+\beta' t\zeta', Z'+\gamma' t\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \qquad B_t' = \frac{\partial(Z'+\gamma' t\zeta', X'+\alpha' t\zeta')}{\partial(\xi', \eta')},$$

$$C_t' = \frac{\partial(X'+\alpha' t\zeta', Y'+\beta' t\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}; \tag{2.9}$$

$$\varrho_t^2 = (X'+\alpha' t\zeta' - X - \alpha t\zeta)^2 + (Y'+\beta' t\zeta' - Y - \beta t\zeta)^2 + (Z'+\gamma' t\zeta' - Z - \gamma t\zeta)^2.$$

Der Ausdruck

$$\mathsf{P} = U^{(2)} + U^{(3)} + \dots \tag{2.10}$$

genügt den für das Weitere wesentlichen Ungleichheiten

$$|\mathsf{P}|, \left|\frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \eta}\right| \leqq \gamma^* \varepsilon^* \qquad (\gamma^* \text{ konstant}). \tag{2.11}$$

Aus später ersichtlichen Gründen[31]) führen wir unter Abänderung der Festsetzungen (1.14), (1.15) in

$$C\frac{c^2}{a^2} - A + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\left(2 + \frac{c^2}{a^2}\right) = w_1, \tag{2.12}$$

$$C\frac{c^2}{b^2} - B + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) = w_2 \tag{2.13}$$

oder, was wegen (1.13) dasselbe bedeutet, in

$$C\frac{c^2}{b^2} - B + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\frac{c^2}{b^2} = w_2, \tag{2.14}$$

$$C\frac{c^2}{a^2} - A + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(3 + \frac{c^2}{a^2}\right) = w_1 \tag{2.15}$$

die beiden beliebig kleinen, noch in geeigneter Weise zu bestimmenden Parameter w_1, w_2 ein.

Leichte Umformungen vermöge der Formeln (1.3), (1.4), (1.6), (2.14), (2.15) ergeben jetzt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} U &= \frac{\partial U}{\partial X}\alpha + \frac{\partial U}{\partial Y}\beta + \frac{\partial U}{\partial Z}\gamma = -2p\left[A\frac{X^2}{a^2} + B\frac{Y^2}{b^2} + C\frac{Z^2}{c^2}\right] \\
&= -2pBb^2\left[\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} + \frac{Z^2}{c^4}\right] - 2p\frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(3\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right) \\
&\qquad - 2p\left[\left(\frac{b^2}{a^2}w_2 - w_1\right)\frac{X^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2}w_2\frac{Z^2}{c^2}\right] \\
&= -2\frac{Bb^2}{p} - \frac{\omega^2}{\varkappa f}(3X\alpha - Z\gamma) - 2p\left[\left(\frac{b^2}{a^2}w_2 - w_1\right)\frac{X^2}{a^2} + w_2 b^2\frac{Z^2}{c^4}\right) \\
&= -2\frac{Bb^2}{p} - \frac{\omega^2}{\varkappa f}(3X\alpha - Z\gamma) + 2p\left(w_1\frac{X^2}{a^2} + w_2\frac{Y^2}{b^2}\right) - 2w_2\frac{b^2}{p}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

[31]) Die Parameter w_1, w_2 entsprechen dem in § 7 des ersten Teiles eingeführten Parameter $\boldsymbol{w}$.

Demzufolge wird

$$(2.17)\qquad U^{(1)} = -2\frac{Bb^2}{p}\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' - \zeta\frac{\omega^2}{\varkappa f}(3X\alpha - Z\gamma) + 2p\zeta\left(w_1\frac{X^2}{a^2} + w_2\frac{Y^2}{b^2}\right) - 2\zeta w_2\frac{b^2}{p}.$$

Wegen (1.17), (1.13), (1.19) gilt

$$\mathfrak{G}(X_1; Y_1, Z_1) = \frac{M}{2fL^3}[2L^2 - 2X_1 L - (Y_1^2 + Z_1^2 - 2X_1^2)]$$

$$(2.18)\qquad = \frac{\omega^2}{2\varkappa f}[2L^2 - c^2 - 2XL + \left(2 + \frac{c^2}{a^2}\right)X^2 + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right)Y^2 - 2\alpha\zeta L + 2\zeta(2X\alpha - Y\beta - Z\gamma) + \zeta^2(2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)].$$

Nach Einführung des hinreichend kleinen Parameters λ vermöge

$$(2.19)\qquad \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa f} = \frac{qa}{2L}\lambda = \frac{q}{2}h\lambda\ ^{32}) \qquad (|\lambda| \leqq h),$$

wobei q eine aus Zweckmäßigkeitsgründen erst später näher zu bestimmende Konstante bedeutet, erhalten wir

$$(2.20)\qquad \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}[(L + X_1)^2 + Y_1^2] = \left(\frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{q}{2}h\lambda\right) \times [L^2 + 2LX + X^2 + Y^2 + 2\alpha\zeta L + 2\zeta(X\alpha + Y\beta) + \zeta^2(\alpha^2 + \beta^2)].$$

Aus (1.21), (1.9), (2.4), (2.17), (2.10), (2.18) und (2.20) folgt jetzt die Beziehung

$$(2.21)\quad D - Cc^2 + \left(C\frac{c^2}{a^2} - A\right)X^2 + \left(C\frac{c^2}{b^2} - B\right)Y^2 - 2B\frac{b^2}{p}\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' - \zeta\frac{\omega^2}{\varkappa f}(3X\alpha - Z\gamma) + 2p\zeta\left(w_1\frac{X^2}{a^2} + w_2\frac{Y^2}{b^2}\right) - 2\zeta w_2\frac{b^2}{p} + \mathsf{P} + \left(\frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{q}{2}h\lambda\right)[L^2 + 2LX + X^2 + Y^2 + 2\alpha\zeta L + 2\zeta(X\alpha + Y\beta) + \zeta^2(\alpha^2 + \beta^2)] + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left[2L^2 - c^2 - 2LX + \left(2 + \frac{c^2}{a^2}\right)X^2 + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right)Y^2 - 2\alpha\zeta L + 2\zeta(2X\alpha - Y\beta - Z\gamma) + \zeta^2(2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\right] = s_1.$$

Es sei

$$(2.22)\quad D - Cc^2 + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}L^2 + \frac{\omega^2}{\varkappa f}(L^2 - c^2) + \frac{q}{2}aL\lambda - s_1 + s = 0$$

(s hinreichend klein)

---

[32]) Diese spezielle Annahme wird durch Betrachtungen, die den in der Fußnote [13]) angestellten analog verlaufen, nahe gelegt.

und

$$\psi = -2B\frac{b^2}{p}. \quad (2.23)$$ [33])

Nach leichten Umformungen erhalten wir wegen (2.14) und (2.15)

$$\psi\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - w_1 X^2 - w_2 Y^2 - \frac{q}{2} h\lambda[2LX + X^2 + Y^2] - \zeta^2 \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(3\alpha^2 - \gamma^2) - w_1 \zeta 2p\left[\frac{X^2}{a^2} + \frac{w_2}{w_1}\frac{Y^2}{b^2}\right] + w_2 \zeta 2\frac{b^2}{p} - q h\lambda\zeta[L\alpha + X\alpha + Y\beta] - \frac{q}{2} h\lambda\zeta^2(\alpha^2 + \beta^2) - \mathsf{P} \equiv \Pi(\zeta). \quad (2.24)$$

Dies ist eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ. Ihre linke Seite enthält ζ linear, während auf der rechten Seite $\Pi(\zeta)$ die unbekannte Funktion ζ mindestens von zweiter Ordnung oder mit einem der kleinen Parameter s, w_1, w_2, h, λ multipliziert auftritt. Die von ζ freien Terme der rechten Seite enthalten mindestens einen dieser kleinen Parameter [34]).

Späteren Anwendungen zuliebe geben wir noch den Wert, den $\Pi(\zeta)$ für $\zeta = 0$ erhält, an:

$$\Pi(0) = s - w_1 X^2 - w_2 Y^2 - \lambda q a X - \frac{q}{2} h\lambda[X^2 + Y^2]. \quad (2.25)$$ [35])

§ 3.

Eine homogene Integralgleichung.

Die durch Nullsetzen der rechten Seite aus (2.24) entstehende homogene lineare Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0 \quad (3.1)$$

hat nur eine, einer Drehung entsprechende, triviale Nullösung. Liegen außer dieser für ein bestimmtes Ausgangsellipsoid S weitere (nichttriviale)

---

[33]) Der Ausdruck ψ stellt die nach außen positiv gerichtete Schwerkraft im Punkte (ξ, η) dar. Bei den Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoiden erhält ψ den Wert $-2C\frac{c^2}{p}$.

[34]) Hat man es statt des Außenfeldes $\mathfrak{G}$ mit dem Fremdfeld G zu tun, so tritt in $\Pi(\zeta)$ noch eine Entwicklung des Zusatzfeldes $h\hat{\mathfrak{G}}$ hinzu. Man vergleiche die Ausführungen für das ebene Problem im ersten Teile.

[35]) Hätte man im Gegensatz zu (2.19) $\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa f}$ nicht proportional h angesetzt, etwa gleich $\tilde{\lambda}$, unter $\tilde{\lambda}$ ein kleiner Parameter verstanden, so wäre in (2.25) der nun nicht mehr notwendig kleine Ausdruck $\lambda 2LX$ für $\lambda q a X$ eingetreten.

Nullösungen vor, so soll S als „singuläre“ Figur bezeichnet werden; andernfalls heiße S „regulär“.

Das System sämtlicher Nullösungen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ werde gemäß den Bedingungen

$$-\int_S \psi u_i u_j \, d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \tag{3.2}$$

orthogonal und normiert angenommen.

Da die vorliegende homogene Integralgleichung bis auf den konstanten Faktor in dem Ausdruck ψ (vgl. die Fußnote [33]) mit der entsprechenden homogenen Integralgleichung in dem Fall Jacobischer oder Maclaurinscher Ellipsoide übereinstimmt, können wir als bekannt ansehen, daß die Eigenfunktionen Lamésche Funktionen sind[36]). Das gleiche gilt offenbar für die um einen reellen Parameter l_n erweiterte Integralgleichung

$$\psi \zeta + l_n \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' \, d\sigma' = 0. \tag{3.3}$$

Freilich gibt uns dies noch nicht die gewünschte Einsicht, welche der Laméschen Funktionen Nullösungen von (3.1) sind, weil ja die Bestimmung der Achsenverhältnisse in (2.14), (2.15) abweichend von der Festsetzung im Fall der Jacobischen Ellipsoide vorgenommen wurde. In diesem Fall erhält man bekanntlich die trivialen Nullösungen

$$u_1 = q_1' p Z, \quad u_2 = q_2' p XY \qquad (q_1', q_2' \text{ konstant}). \tag{3.4}$$

Hierbei entspricht u_1 einer beliebig kleinen Verschiebung des Körpers T längs der Z-Achse und u_2 einer beliebig kleinen Drehung um diese Achse. Die zugehörigen Eigenwerte haben hier vermöge der zwischen den Halbachsen des Ellipsoides und der Winkelgeschwindigkeit bestehenden Beziehungen beide den Wert 1. Weil nun bei dem vorgelegten Problem an ihre Stelle die hiervon wesentlich verschiedenen Beziehungen (2.14), (2.15) treten, braucht jetzt nicht mehr $l_n = 1$ zu sein.

Um leichteren Anschluß an das bereits zitierte Buch von Herrn Appell, das wir den weiteren Ausführungen prinzipiell zugrunde legen wollen, zu finden, führen wir durch die Gleichungen

$$x = z, \quad y = y, \quad z = x \tag{3.6}$$

ein neues kartesisches Bezugssystem ein[37]). Des weiteren mögen ϱ, μ, ν die elliptischen Koordinaten des Punktes (x, y, z) bedeuten. Auf S hat ϱ

[36]) Um uns im folgenden kürzer fassen zu können, sei bezüglich der Laméschen Funktionen auf das Buch von P. Appell, Traité de mécanique rationnelle **4**, Paris 1921, insbes. Chapitre IV u. VII verwiesen.

[37]) Die fett gedruckten kleinen lateinischen Buchstaben haben die a. a. O. [36]) ohne Fettdruck auftretenden Zeichen zu vertreten.

einen konstanten Wert $\varrho = \varrho^0$. Offenbar übernehmen jetzt die Koordinaten μ, ν die Rolle der weiter oben eingeführten Gaußschen Parameter ξ, η. Wir setzen ferner

$$(3.7)\quad a^2 = \varrho^{0\,2} - c^2; \quad b^2 = \varrho^{0\,2} - b^2; \quad c^2 = \varrho^{0\,2} - a^2 \qquad (c < b < a).$$

Die Laméschen Funktionen erster Art seien durch

$$(3.8)\qquad R_k = R_k(\varrho^2), \quad M_k = M_k(\mu^2), \quad N_k = N_k(\nu^2)$$

bezeichnet, die mit R_k durch die Beziehung

$$(3.9)\qquad S_k = R_k \int_{\infty}^{\varrho} \frac{2n+1}{R_k^2} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}}$$

verbundene Lamésche Funktion zweiter Art durch $S_k = S_k(\varrho^2)$. Auf S schreiben wir kürzer R_k^0, S_k^0 für $R_k(\varrho^{0\,2}), S_k(\varrho^{0\,2})$. Endlich merken wir noch einige für das weitere nützliche Ergebnisse über die Laméschen Funktionen der niedrigsten Ordnungen an:

$$R_0^0 = 1, \quad M_0 = 1, \quad N_0 = 1 \qquad \text{(Ordnung } n = 0);$$

$$(3.10)\quad (n=1)\begin{cases} R_1^0 = c, & Z = x = h_1 R_1^0 M_1 N_1; \quad h_1^{-2} = (a^2 - b^2)(a^2 - c^2), \\ R_2^0 = b, & Y = y = h_2 R_2^0 M_2 N_2; \quad h_2^{-2} = (b^2 - a^2)(b^2 - c^2), \\ R_3^0 = a, & X = z = h_3 R_3^0 M_3 N_3; \quad h_3^{-2} = (c^2 - a^2)(c^2 - b^2), \end{cases}$$

$$(n=2)\begin{cases} R_4^0 = a\,b, & YZ = XY = h_2 h_3 R_4^0 M_4 N_4, \\ R_5^0 = a\,c, & ZX = XZ = h_3 h_1 R_5^0 M_5 N_5, \\ R_6^0 = b\,c, & XY = YZ = h_1 h_2 R_6^0 M_6 N_6. \end{cases}$$

Wir schreiben

$$(3.11)\qquad p = a\,b\,c\,l_0 = R_1^0 R_2^0 R_3^0 l_0, \qquad (l_0 = l_0(\mu, \nu)).$$

Dann wird das Volumen des Flüssigkeitsellipsoids

$$(3.12)\qquad T = \frac{4\pi}{3} a\,b\,c = \frac{4\pi}{3} R_1^0 R_2^0 R_3^0.$$

Wegen

$$(3.13)\qquad A = \frac{2\pi}{3} b\,c\,S_3^0 = \frac{T}{2}\frac{S_3^0}{R_3^0}, \qquad B = \frac{2\pi}{3} a\,c\,S_2^0 = \frac{T}{2}\frac{S_2^0}{R_2^0},$$

$$C = \frac{2\pi}{3} a\,b\,S_1^0 = \frac{T}{2}\frac{S_1^0}{R_1^0}$$

erhält jetzt die Schwerkraft ψ die Form

$$(3.14)\qquad \psi = -\frac{4\pi}{3} R_2^0 S_2^0 \cdot \frac{1}{l_0}.$$

Wir machen ferner Gebrauch von dem Satz:

Jede in dem Rechteck $c \leqq \nu \leqq b$, $b \leqq \mu \leqq a$ nebst ihren partiellen Ableitungen bis einschließlich zweiter Ordnung stetige Funktion läßt eine Darstellung in Form einer nach Laméschen Produkten fortschreitenden, absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k M_k N_k \tag{3.15}$$

zu[38]). Die Laméschen Produkte erfüllen weiter die Orthogonalitätsrelation

$$\int_S l_0 M_k N_k M_j N_j = 0, \tag{3.16}$$

wobei $M_k N_k$ und $M_j N_j$ entweder von verschiedener Ordnung sind oder von derselben Ordnung, aber dann verschiedene Lösungen der sie definierenden Differentialgleichung derselben Ordnung n repräsentieren.

Aus der Definitionsgleichung der Nullösungen von (3.3)

$$\psi u_n = -l_n \int_S \frac{1}{\varrho} u_n' \, d\sigma' \tag{3.17}$$

und gewissen Eigenschaften des Newtonschen Potentials[39]) einer einfachen Flächenbelegung folgt, daß u_n stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich hat.

Läßt sich die Dichte ζ einer einfachen Flächenbelegung auf S in eine nach Laméschen Produkten fortschreitende Reihe der Form

$$\zeta = l_0 \sum \beta_k M_k N_k \tag{3.18}$$

entwickeln, so folgt, wie man in der Theorie der Laméschen Funktionen zeigt, für das Newtonsche Potential dieser Belegung die Darstellungsweise

$$V_0 = \sum \frac{4\pi \beta_k}{2n+1} R_k^0 S_k^0 M_k N_k. \tag{3.19}$$

Wenden wir diesen Satz auf die Integralgleichung (3.17) an, so bestimmen sich die Eigenwerte l_k zu

$$l_k = \frac{2n+1}{3} \frac{R_2^0 S_2^0}{R_k^0 S_k^0}. \tag{3.20}$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen sind von der Form

$$u_k = \hat{k} p M_k N_k \qquad (\hat{k} \text{ konstant}). \tag{3.21}$$

---

[38]) Siehe beispielsweise R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, I, Berlin 1924, S. 270.

[39]) Da das Potential u_n in (3.17) bis auf einen Faktor zugleich die Dichte der auf S ausgebreiteten Massenbelegung darstellt, folgt die Behauptung durch iterierte Anwendung bekannter Sätze. Vgl. insbesondere den Artikel von L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie, Encyklopädie der Math. Wiss. **2**, 3, Heft 3, S. 201ff. und loc. cit. [7]), II. Abh. S. 149ff.

Es liegen nun allemal Nullösungen von (3.1) vor, wenn $l_k = 1$ ist. Es muß also der Ausdruck

$$\frac{R_2^0 S_2^0}{3} - \frac{R_k^0 S_k^0}{2n+1} = F \tag{3.22}$$

für das betreffende Ellipsoid verschwinden,

$$\frac{R_2^0 S_2^0}{3} - \frac{R_k^0 S_k^0}{2n+1} = 0. \tag{3.23}$$

Die Achsenverhältnisse der höchstens abzählbar unendlich vielen ($k = 0, 1, 3, \ldots$) singulären Figuren müssen diesen transzendenten Gleichungen (3.23) genügen. Für den Zeigerwert $k = 2$ ist die Gleichung (3.23) stets erfüllt, gleichgültig welches Ellipsoid der beiden ursprünglichen Reihen zugrunde gelegt wird; mithin stellt

$$u_2 = \hat{k}\, p\, M_2\, N_2 \tag{3.24}$$

die triviale Nullösung von (3.1) dar.

Schwarzschild[40]) wird gelegentlich der Behandlung desselben Problems im Rahmen der Poincaréschen Theorie auf ganz analoge Beziehungen zu (3.23) geführt, die in jener Auffassung für die Fragen des Stabilitätscharakters und der möglichen Abzweigungen von grundlegender Bedeutung sind. In unserer Bezeichnungsweise sind es die Ausdrücke

$$1 - \frac{3 R_k^0 S_k^0}{(2n+1) R_2^0 S_2^0}, \tag{3.25}$$

die als „Stabilitätskoeffizienten" auftreten und von deren Vorzeichenwechsel die Stabilität der Rocheschen Ellipsoide abhängt. Da sich die vollständige Diskussion der Gleichungen (3.25), somit auch diejenige der Gleichungen (3.23) bereits bei Schwarzschild[41]) durchgeführt findet und auch leicht an Hand der in loc. cit.[36]) behandelten analogen Beziehungen im Falle der Jacobischen Ellipsoide vorgenommen werden kann, sei der Kürze halber nur das Ergebnis, das demjenigen des ersten Teiles analog ist (vgl. § 4 des ersten Teiles), mitgeteilt.

Die homogene Integralgleichung (3.1) *besitzt stets die triviale Nullösung* $u_2 = \hat{k}\, p\, M_2\, N_2$. *Für abzählbar unendlichviele* (sich gegen die Figur vom „nadelförmigen" Charakter häufende) *Ellipsoide, die sämtlich der Reihe stärker abgeplatteter Ausgangsfiguren angehören, treten zu der trivialen weitere Nullösungen der Form*

$$u_3^{(n)} = k\, p\, M_k\, N_k \tag{3.26}$$

hinzu. Hierbei bedeuten M_k, N_k Lamésche Funktionen n-ter Ordnung.

[40]) K. Schwarzschild, Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse. (Diss.) Neue Ann. der K. Sternwarte in München 3 (1898), S. 1—69.

[41]) Vgl. loc. cit. [40]) S. 284.

§ 4.

Schlußwort.

Im regulären Fall läßt sich nun der Existenzbeweis unter Benutzung der Kernzerspaltung und durch sukzessive Approximationen in der üblichen Weise erbringen. Man sieht leicht, daß die hierzu erforderlichen Bedingungen erfüllt sind. *Für alle hinreichend kleinen Werte von* $|s|$, $|w_1|$, $|w_2|$, $|\lambda|$, $|h|$ *ist eine und nur eine einzige bezüglich der Ebene* $z = 0$ *symmetrische Lösung* ζ *der fundamentalen Integro-Differentialgleichung des Problems* (2. 24) *vorhanden.* Im regulären Fall ist insbesondere $w_1 = w_2 = 0$. Entsprechend der linearen Reihe der Ausgangsfiguren schließen sich die regulären Figuren „streckenweise" zu linearen Reihen zusammen. Von der Reihe der stärker abgeplatteten können möglicherweise an abzählbar unendlichvielen Stellen neue Figuren abgehen, und es könnte hier der Zusammenhang der linearen Reihen unterbrochen sein. Zur Entscheidung dieser Frage müßte man, was überaus komplizierte Rechnungen erforderte, höhere Glieder, mindestens solche von zweiter Ordnung, zur Diskussion der Verzweigungsgleichung heranziehen.

Noch ein Wort über den singulären Fall $n = 2$. *Er führt zu keinen neuen Figuren, da sich, wie man in Analogie zu den Betrachtungen im ebenen Fall sieht, in der zugehörigen Verzweigungsgleichung* w_1 *und* w_2 *eindeutig durch* λ, h *und* s *bestimmen lassen.*

Dritter Teil.

Ringförmige Gleichgewichtsfiguren mit Zentralkörper.[42])

§ 1.

Problemstellung.

Während die ringförmigen Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper, deren Meridiankurve sich wenig von einem Kreise unterscheidet, in neuerer Zeit eine völlig strenge und befriedigende Behandlung erfahren haben[43]), steht die Frage noch offen, ob sich auf dem gleichen Wege der Existenzbeweis ringförmiger Gleichgewichtsfiguren bei Vorhandensein eines Zentralkörpers führen läßt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß dies tatsächlich der Fall ist, indem wir Figuren betrachten, deren Meridianschnitt sich wenig von einer Ellipse unterscheidet. Diese Annahme wird besonders durch die Ausführungen des ersten Teiles nahegelegt. Übrigens werden wir, ohne hier-

[42]) Die Bezeichnungsweise weicht im vorliegenden stellenweise von derjenigen der ersten beiden Teile ab.

[43]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [8]), III. Abhandlung.

durch eine wesentliche Einschränkung unserer Resultate herbeizuführen, den Zentralkörper durch eine punktförmige Masse ersetzen können. Durch Hinzunahme eines geeigneten, von einem kleinen Parameter abhängigen Außenfeldes, wird man leicht zu dem Fall eines Zentralkörpers von kugelähnlicher Gestalt übergehen können[44]). Die nachfolgenden Betrachtungen werden sich sowohl auf die Ergebnisse bei den Ringfiguren ohne Zentralkörper als auch auf die beiden vorangegangenen Teile über das ebene und räumliche Rochesche Problem stützen.

Zunächst legen wir den folgenden Ausführungen ein räumliches kartesisches Achsenkreuz (x, y, z), in dessen Ursprung sich die punktförmige Masse M befindet, zugrunde. Die Punkte der durch $y = 0$ bestimmten Ebene $\mathfrak{E}$ mögen überdies auf ein neues, durch die Gleichungen

$$x = L + \mathfrak{x}, \quad z = \mathfrak{z} \qquad (L > 0) \tag{1.1}$$

mit dem ursprünglichen verknüpftes ebenes System $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ bezogen werden. Der Ursprung dieses neuen Systems sei zugleich der Mittelpunkt einer durch die Relation

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{R_2^2} = 1 \tag{1.2}$$

definierten Ellipse Σ mit den Halbachsen R_1 und R_2. Läßt man die Ebene $\mathfrak{E}$ um die z-Achse rotieren, so beschreibt dabei die Ellipsenfläche Θ einen ringförmigen Körper T mit elliptischem Meridianschnitt. Die Oberfläche dieses Rotationskörpers werde mit S bezeichnet.

Denken wir uns jetzt den Körper T mit homogener, gravitierender, inkompressibler Flüssigkeit der Dichte f erfüllt und mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω wie ein starrer Körper um die z-Achse rotieren. Wir fragen erstlich, *ob T unter der Einwirkung der Zentralmasse M bei passender Wahl von ω und $R_1 : R_2$ und für kleine Werte von $\frac{R_1}{L}, \frac{R_2}{L} \log \frac{8L}{R}$ nahezu eine Figur relativen Gleichgewichts darstellt*, und zweitens, *ob sich in einer Nachbarschaft erster Ordnung von S weitere geschlossene Umdrehungsflächen S_1*[45]) *mit stetiger Normale auffinden lassen, die für einen von ω wenig verschiedenen Wert ω_1 der Winkelgeschwindigkeit exakte Gleichgewichtsfiguren einschließen.*

Es bezeichne $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante, $\varkappa f V(x, y, z)$ bzw. $\varkappa f G(x, y, z)$ das Newtonsche Potential des Ringkörpers bzw. der Zentralmasse im Punkt (x, y, z); ferner werde $V(X, O, Z) = \mathfrak{V}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$, $G(X, O, Z) = \mathfrak{G}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ gesetzt, wobei (X, Y, Z) bzw. $(X, O, Z) = (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ stets einen auf S bzw. Σ gelegenen Punkt bezeichnet. Da S und S_1

[44]) Diese Bemerkung gilt ebenso für die Problemstellung des zweiten Teiles und mutatis mutandis im ebenen Fall.

[45]) Als Rotationsachse gilt die Gerade $x = y = 0$.

Rotationsflächen sind, bedeutet es gewiß keine Einschränkung, wenn wir die Gleichgewichtsbedingung speziell für einen auf Σ gelegenen Punkt anschreiben

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}(L+\mathfrak{X})^2+\mathfrak{G}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})=s_0+\Psi \quad (s_0 \text{ konstant}), \tag{1.3}$$

unter $\Psi=\Psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$ eine geeignete Korrektionsfunktion verstanden.

§ 2.

Potential des Ringkörpers T in einem Punkte seiner Oberfläche S.

Das Newtonsche Potential einer in der Ebene $z=z_0$ mit dem Halbmesser l um den Punkt (O,O,z_0) beschriebenen und mit Masse der Dichte 1 belegten Kreislinie lautet bekanntlich

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z};\alpha,\gamma)=\left(\log\frac{2l}{d}\right)\left\{2-\frac{X-l}{l}-\frac{d^2}{8l^2}+\frac{3}{4}\frac{(X-l)^2}{l^2}+O\left(\frac{d^3}{l^3}\right)\right\} \tag{2.1}$$
$$+2\log 4+(1-\log 4)\frac{X-l}{l}+O\left(\frac{d^2}{l^2}\right).^{46})$$

Hierbei ist

$$X=L+\mathfrak{X};\quad Z=\mathfrak{Z};\quad l=L+\alpha;\quad \gamma=z_0; \tag{2.2}$$
$$d^2=(\mathfrak{X}-\alpha)^2+(\mathfrak{Z}-\gamma)^2.$$

Für das Newtonsche Potential des Ringkörpers T im Aufpunkt $(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$ erhalten wir nach (2.1)

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})=\int_\Theta \mathfrak{V}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z};\alpha,\gamma)\,d\alpha\,d\gamma \tag{2.3}$$
$$=\int_\Theta \log\frac{2L}{d}\left\{2-\frac{\mathfrak{X}-\alpha}{L}+\frac{(\mathfrak{X}-\alpha)\alpha}{L^2}+\frac{3}{4}\frac{(\mathfrak{X}-\alpha)^2}{L^2}-\frac{d^2}{8L^2}\right\}d\alpha\,d\gamma$$
$$+\int_\Theta\left\{2\log 4+(1-\log 4)\frac{\mathfrak{X}-\alpha}{L}+2\frac{\alpha}{L}\right\}d\alpha\,d\gamma+O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$$
$$(R=\operatorname{Max}(R_1,R_2)).$$

Da die ξ-Koordinate des Schwerpunktes der Ellipsenscheibe Θ verschwindet, gilt

$$\int_\Theta \alpha\,d\alpha\,d\gamma=0. \tag{2.4}$$

Das Trägheitsmoment der Ellipse in bezug auf die ζ-Achse hat den Wert

$$\int_\Theta \alpha^2\,d\alpha\,d\gamma=\frac{\pi}{4}R_1^3R_2. \tag{2.5}$$

Endlich ist

$$\int_\Theta \log\frac{2L}{d}\,d\alpha\,d\gamma=D-A\mathfrak{X}^2-B\mathfrak{Z}^2, \tag{2.6}$$

---

46) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. 5), III. Abhandlung, S. 106, Formel (32).

da die linke Seite gerade das logarithmische Potential der mit Masse der Dichte 1 belegten Ellipsenfläche Θ darstellt; die Konstanten A, B, D haben die Werte

$$(2.7)\quad A=\pi\frac{R_2}{R_1+R_2},\quad B=\pi\frac{R_1}{R_1+R_2},\quad D=\pi R_1R_2\left[\frac{1}{2}+\log\frac{4L}{R_1+R_2}\right].$$

Setzen wir hier noch wie im ersten Teil

$$(2.8)\qquad r=\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}\quad\text{bzw.}\quad\frac{R_2}{R_1}=\frac{1-r}{1+r},$$

so gilt

$$A=\pi\frac{1-r}{2},\quad B=\pi\frac{1+r}{2},\quad D=\pi R_1R_2\left[\frac{1}{2}+\log\frac{2L}{R_1}(1+r)\right],^{47})$$

und darum nach Elimination von $\mathfrak{Z}^2$ gemäß (1.2)

$$(2.9)\quad \int_\Theta\log\frac{2L}{d}\,d\alpha\,d\gamma=\pi R_1R_2\left[\frac{r}{2}+\log\frac{2L}{R_1}(1+r)\right]-\pi r\frac{1-r}{1+r}\mathfrak{X}^2.$$

Für die Auswertung des Integrals

$$(2.10)\qquad J_1=\int_\Theta\frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d}\,d\alpha\,d\gamma$$

bemerken wir, daß die Divergenz des Vektors mit den Komponenten

$$(2.11)\qquad P=\frac{\alpha(\alpha-\mathfrak{X})}{3L}\log\frac{2L}{d},\quad Q=\frac{\alpha(\gamma-\mathfrak{Z})}{3L}\log\frac{2L}{d}$$

$$(d^2=(\mathfrak{X}-\alpha)^2+(\mathfrak{Z}-\gamma)^2)$$

gerade den Wert

$$(2.12)\qquad \frac{\partial P}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q}{\partial\gamma}=\frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d}-\frac{\mathfrak{X}}{3L}\log\frac{2L}{d}-\frac{\alpha}{3L}$$

hat. Daher liefert die Gaußsche Transformationsformel nach Ausschluß einer Kreisfläche von beliebig kleinem Radius ϱ um den Punkt $(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$ und nachfolgenden Übergang zur Grenze $\varrho\to 0$ unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.4) und (2.9)

$$3)\quad \int_\Theta\frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d}\,d\alpha\,d\gamma=\frac{1}{3L}\int_\Theta\alpha\,d\alpha\,d\gamma+\frac{\mathfrak{X}}{3L}\int_\Theta\log\frac{2L}{d}\,d\alpha\,d\gamma+\int_\Sigma(P'a'+Q'c')\,ds'$$

$$=\pi R_1R_2\frac{\mathfrak{X}}{3L}\left[\frac{r}{2}+\log\frac{2L}{R_1}(1+r)\right]-\pi r\frac{1-r}{1+r}\mathfrak{X}^2\frac{\mathfrak{X}}{3L}+\int_\Sigma(P'a'+Q'c')\,ds',$$

wobei s' den Punkt $(\mathfrak{X}',\mathfrak{Z}')$ auf Σ, ds' das Bogenelement in diesem Punkt, a' und c' die Richtungskosinus der Außennormale (ν') in $(\mathfrak{X}',\mathfrak{Z}')$, endlich P' bzw. Q' den Wert bezeichnet, den P und Q erhalten, wenn α durch $\mathfrak{X}'$, γ durch $\mathfrak{Z}'$ ersetzt wird. Ziehen wir auch hier wie im Rocheschen Fall

---

47) Vgl. Formel (2.3) des ersten Teiles.

in der Ebene die exzentrische Anomalie ψ zur Parameterdarstellung der Ellipse Σ heran, so gilt wie dort

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= R_1 \cos\psi, \quad & \mathfrak{X}' &= R_1 \cos\psi' \\ \mathfrak{Z} &= R_2 \sin\psi, \quad & \mathfrak{Z}' &= R_2 \sin\psi' \end{aligned} \qquad (0 \leqq \psi < 2\pi);$$

$$a' = \frac{\mathfrak{X}'}{R_1^2}\, p', \qquad c' = \frac{\mathfrak{Z}'}{R_2^2}\, p', \qquad ds' = \frac{R_1 R_2}{p'}\, d\psi',$$

$$p' = p(\psi') = \left(\frac{\mathfrak{X}'^2}{R_1^4} + \frac{\mathfrak{Z}'^2}{R_2^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir noch (vgl. die Formel (4.5) des ersten Teiles)

$$(2.15)\quad \bar{\varrho}^2 = (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X})^2 + (\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z})^2 = \frac{4R_1^2}{(1+r)^2} \sin^2\frac{\vartheta}{2}\,[1 + r^2 - 2r\cos\tau]$$

$$\begin{pmatrix} \vartheta = \psi' - \psi, \\ \tau = \psi' + \psi \end{pmatrix},$$

so läßt sich schreiben

$$(2.16)\quad \int_\Sigma (P'a' + Q'c')\, ds' = \frac{R_1 R_2}{3L} \int_0^{2\pi} \left[(\mathfrak{X}' - \mathfrak{X})\frac{\mathfrak{X}'}{R_1^2} + (\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z})\frac{\mathfrak{Z}'}{R_2^2}\right] \mathfrak{X}' \log\frac{2L}{\bar{\varrho}}\, d\psi$$

$$= \frac{R_1^2 R_2}{3L} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}\cos\psi + \cos\psi' - \frac{1}{2}\cos 2\psi' \cos\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi' \sin\psi\right] \log\frac{2L}{\bar{\varrho}}\, d\psi$$

Aus den Formeln

$$\int_0^{2\pi} \left(\log\frac{2L}{\bar{\varrho}}\right) \cos m\psi'\, d\psi' = \frac{\pi}{m}(1 + r^m)\cos m\psi,$$

$$(m \geqq 1, \text{ ganzzahlig}),$$

$$(2.17)\quad \int_0^{2\pi} \left(\log\frac{2L}{\bar{\varrho}}\right) \sin m\psi'\, d\psi' = \frac{\pi}{m}(1 - r^m)\sin m\psi,$$

$$\int_0^{2\pi} \log\frac{2L}{\bar{\varrho}}\, d\psi' = 2\pi \log\frac{2L}{R_1}(1 + r)$$

folgt nunmehr

$$(2.18)\qquad \int_\Sigma (P'a' + Q'c')\, ds'$$

$$= \pi R_1 R_2 \frac{\mathfrak{X}}{3L}\left[\frac{3}{4}\left(1 + \frac{4}{3}r + r^2\right)\right) - \log\frac{4L}{R_1 + R_2}\Big] - \pi r^2 \frac{1-r}{1+r}\mathfrak{X}^2 \frac{\mathfrak{X}}{3L}.$$

Daher und wegen (2.13) erhalten wir schließlich

$$(2.19)\quad \int_\Theta \frac{\alpha}{L} \log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = \pi R_1 R_2 (1+r)^2 \frac{\mathfrak{X}}{4L} - \pi r(1-r)\mathfrak{X}^2 \frac{\mathfrak{X}}{3L}.$$ [48])

[48]) Diese Formel geht für $R_1 = R_2$, $r = 0$ in die loc. cit. [8]), III, S. 107 angeführte Beziehung (38) über.

Ersetzen wir hier $\mathfrak{x}, R_1, R_2, r$ durch $\mathfrak{Z}, R_2, R_1, -r$, so ergibt sich

$$(2.20)\quad \int_{\Theta} \frac{\gamma}{L} \log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = \pi R_1 R_2 (1-r)^2 \frac{\mathfrak{Z}}{4L} + \pi r(1+r)\mathfrak{Z}^2 \frac{\mathfrak{Z}}{3L}.$$

Das Integral

$$(2.21)\quad \int_{\Theta} \frac{\alpha^2}{L^2} \log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = J_2$$

auszuwerten, verfahren wir jetzt ganz analog. Sind

$$(2.22)\quad \bar{P} = \frac{\alpha^2(\alpha-\mathfrak{x})}{4L^2}\log\frac{2L}{d}, \qquad \bar{Q} = \frac{\alpha^2(\gamma-\mathfrak{Z})}{4L^2}\log\frac{2L}{d}$$

die Komponenten eines Vektors, so lautet seine Divergenz

$$(2.23)\quad \frac{\partial\bar{P}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\bar{Q}}{\partial\gamma} = \frac{\alpha^2}{L^2}\log\frac{2L}{d} - \frac{\mathfrak{x}}{2L}\cdot\frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d} - \frac{\alpha^2}{4L^2}.$$

Mithin wird wegen (2.5), (2.19) und unter Anwendung der Gaußschen Formel

$$(2.24)\quad J_2 = \frac{\pi R_1^3 R_2}{16L^2} + \pi R_1 R_2 (1+r)^2 \frac{\mathfrak{x}^2}{8L^2} - \pi r(1-r)\mathfrak{x}^2 \frac{\mathfrak{x}^2}{6L^2} + \int_{\Sigma} (\bar{P}'a' + \bar{Q}'c')\, ds'.$$

Trägt man die in (2.22) angeschriebenen Ausdrücke für $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ in das letzte Integral ein, so folgt nach (2.14)

$$25)\quad \int_{\Sigma} (\bar{P}'a' + \bar{Q}'c')\, ds' = \frac{R_1 R_2}{4L^2}\int_0^{2\pi}\left[(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x})\frac{\mathfrak{x}'}{R_1^2} + (\mathfrak{Z}'-\mathfrak{Z})\frac{\mathfrak{Z}'}{R_2^2}\right]\mathfrak{x}'^2 \log\frac{2L}{\varrho}\, d\psi'$$

$$= \frac{R_1^3 R_2}{4L^2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos\psi'\cos\psi - \frac{1}{4}\sin\psi'\sin\psi + \frac{1}{2}\cos 2\psi' - \frac{1}{4}\cos 3\psi'\cos\psi - \frac{1}{4}\sin 3\psi'\sin\psi\right]\log\frac{2L}{\varrho}\, d\psi'$$

und endgültig wegen (2.17)

$$(2.26)\quad \int_{\Sigma} (\bar{P}'a' + \bar{Q}'c')\, ds'$$

$$= \pi R_1 R_2 \frac{R_1^2}{4L^2}\log\frac{4L}{R_1+R_2} - \pi R_1 R_2 \frac{R_1^2}{48L^2}(5 - 3r + 3r^2 + r^3)$$

$$- \pi R_1 R_2 \frac{\mathfrak{x}^2}{24L^2}(1 + 6r - 3r^2 - 4r^3) - \pi r^3 \frac{1-r}{1+r}\frac{\mathfrak{x}^4}{6L^2}.$$

Nunmehr können wir für (2.24) schreiben

$$(2.27)\qquad \int_{\mathcal{O}} \frac{\alpha^2}{L^2} \log \frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma$$

$$= \pi R_1 R_2 \frac{R_1^2}{4L^2} \log \frac{4L}{R_1+R_2} - \pi R_1 R_2 (2 - 3r + 3r^2 + r^3) \frac{R_1^2}{48L^2}$$

$$+ \pi R_1 R_2 (2 + 6r^2 + 4r^3) \frac{\mathfrak{X}^2}{24L^2} - \pi r \frac{1-r^3}{1+r} \mathfrak{X}^2 \frac{\mathfrak{X}^2}{6L^2}.$$ [49])

In einer ganz ähnlichen Weise ergibt sich

$$(2.28)\qquad \int_{\mathcal{O}} \frac{\gamma^2}{L^2} \log \frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma$$

$$= \pi R_1 R_2 \frac{R_2^2}{4L^2} \log \frac{4L}{R_1+R_2} - \pi R_1 R_2 (2 + 3r + 3r^2 - r^3) \frac{R_2^2}{48L^2}$$

$$+ \pi R_1 R_2 (2 + 6r^2 - 4r^3) \frac{\mathfrak{Z}^2}{24L^2} + \pi r \frac{1+r^3}{1-r} \mathfrak{Z}^2 \frac{\mathfrak{Z}^2}{6L^2}.$$

Da man den Ausdruck in der geschweiften Klammer unter dem ersten Integral der rechten Seite von (2.3) in die Form

$$(2.29)\qquad \left\{\left(2 - \frac{\mathfrak{x}}{L} + \frac{5\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{Z}^2}{8L^2}\right) + \left(1 - \frac{\mathfrak{x}}{4L}\right)\frac{\alpha}{L} + \frac{3\gamma}{4L^2} - \frac{3\alpha^2}{8L^2} - \frac{\gamma^2}{8L^2}\right\}$$

bringen kann, liefern die Ausdrücke (2.4), (2.5), (2.9), (2.20), (2.19), (2.27), (2.28), in (2.3) eingesetzt, nach einer leichten Umformung

$$(2.30)\qquad \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = 2\pi R_1 R_2 \log \frac{16L}{R_1 R_2} + \pi r R_1 R_2 - 2\pi r \frac{1-r}{1+r} \mathfrak{X}^2$$

$$- \pi R_1 R_2 \frac{\mathfrak{x}}{L} \log \frac{16L}{R_1+R_2} + \pi R_1 R_2 \frac{\mathfrak{x}}{4L}(5 + r^2) + \pi r \frac{1-r}{1+r}(2 - r)\mathfrak{X}^2 \frac{\mathfrak{x}}{3L}$$

$$+ \pi R_1 R_2 \frac{R_1^2}{L^2}\left[\frac{\mathfrak{X}^2}{4R_1^2} \frac{3 + 4r + 3r^2}{(1+r)^2} - \frac{1}{8}\frac{2 - r + 2r^2}{(1+r)^2}\right] \log \frac{16L}{R_1+R_2} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right).$$ [50])

Die Terme in der ersten Zeile rechter Hand stellen gerade das Newtonsche Potential eines unendlich langen geraden Zylinders von elliptischem Querschnitt in einem Randpunkt dar.

---

[49]) Der Ausdruck rechter Hand in (2.27) geht für $R_1 = R_2$ ($r = 0$) in den loc. cit. [8]), III, S. 107, Formel (39) angegebenen über.

[50]) Bis auf den Koeffizienten $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1}{16}$ in der eckigen Klammer wird (2.30) für $R_1 = R_2$ mit der Beziehung (40) in loc. cit. [8]), III, S. 108 identisch. Auf diese für die weiteren Entwicklungen unwesentliche Unstimmigkeit ist schon in der Note von V. Garten und K. Maruhn, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper, eine aus zwei getrennten Ringkörpern bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 154–160, hingewiesen worden. Vgl. Fußnote [6]) der genannten Arbeit.

§ 3.

Vorbereitende Betrachtungen.

Ein Blick auf Formel (2.30) lehrt, daß wir für hinreichend kleine Werte von $h = \left|\frac{R}{L}\right|$, $k = \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|$ eine beliebig gute Annäherung an das gestellte Problem erreichen, wenn wir den Ringkörper T durch einen unbegrenzten, geraden Zylinder mit der Ellipse Θ als Normalschnitt ersetzen.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie das Verhältnis der Halbachsen und der Wert der Winkelgeschwindigkeit zu bestimmen sind, damit T annäherungsweise eine Gleichgewichtsfigur darstellt. Beschränken wir uns zunächst auf die ersten Glieder von (2.30)

$$(3.1)\quad \mathfrak{W}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z}) = 2\pi R_1 R_2 \log\frac{16L}{R_1+R_2} + \pi r R_1 R_2 - 2\pi r\frac{1-r}{1+r}\mathfrak{X}^2 + O(k).$$

Das von der Anziehung der Zentralmasse M herrührende Potential $\mathfrak{G}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$ läßt sich für hinreichend kleine Werte von h, etwa

$$(3.2)\qquad |h| \leqq h^*,$$

nach Potenzen von h entwickeln[51]):

$$(3.3)\quad \mathfrak{G}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z}) = \frac{M}{2fL^3}[2L^2 - 2\mathfrak{X}L + (2\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Z}^2) + R^2 O(h)].$$

Unter Verwendung der Beziehungen (3.1) und (3.3) erhält die Gleichgewichtsbedingung (1.3) die Gestalt

$$2\pi R_1 R_2 \log\frac{16L}{R_1+R_2} + \pi r R_1 R_2 + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}L^2 + \frac{M}{2fL^3}(2L^2 - R_2^2) - s_0$$

$$\left(\frac{\omega^2}{\varkappa f} - \frac{M}{fL^3}\right)\mathfrak{X}L + \left(\frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\frac{3+2r+3r^2}{(1+r)^2} - 2\pi r\frac{1-r}{1+r}\right)\mathfrak{X}^2 + R^2 O(k) = \Psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Z}).$$

Treffen wir jetzt über die Konstante s_0, den Wert ω der Winkelgeschwindigkeit und das Achsenverhältnis der Ellipse Θ die Festsetzungen

$$(3.5)\quad s_0 = 2\pi R_1 R_2 \log\frac{16L}{R_1+R_2} + \pi r R_1 R_2 + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}L^2 + \frac{M}{2fL^3}(2L^2 - R_2^2),$$

$$(3.6)\qquad \frac{\omega^2}{\varkappa f} = \frac{M}{fL^3},$$

$$(3.7)\qquad \frac{\omega^2}{2\varkappa f} + \frac{M}{2fL^3}\frac{3+2r+3r^2}{(1+r)^2} = 2\pi r\frac{1-r}{1+r},$$

so folgt unmittelbar die Aussage über die Größenordnung der Korrektionsfunktion Ψ

$$(3.8)\qquad \Psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Z}) = R^2 O(k).$$

---

[51]) Vgl. Formel (1.8) des zweiten Teiles.

Unter den angeschriebenen Bedingungen läßt sich demnach die Funktion $\Psi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ in der Tat mit den Parametern h und k beliebig klein machen, der Ringkörper T stellt näherungsweise eine Gleichgewichtsfigur dar.

Der in (3.6) angegebene Wert der Winkelgeschwindigkeit ist derselbe, den man einem kleinen, im gleichen Abstand um M kreisenden Satelliten nach dem dritten Keplerschen Gesetze beizulegen hätte.

Die Beziehung (3.7) läßt sich nun wegen (3.6) einfacher

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} = \frac{r(1-r^2)}{1+r+r^2} \tag{3.9}$$

schreiben. Setzen wir noch

$$\Omega = \frac{\omega^2}{\pi \varkappa f}, \tag{3.10}$$

so können wir sie auch in die Form

$$\Omega = r\,\frac{(1-r^2)(1-r)}{1-r^3} \tag{3.11}$$

bringen. Hieraus und aus den Relationen

$$\Omega \geqq 0; \quad \frac{1-r}{1+r} = \frac{R_2}{R_1} > 0, \quad \text{d. h. } r^2 < 1 \tag{3.12}$$

schließt man ohne weiteres, daß $r > 0$, also $R_1 > R_2$ ist. Die größere der beiden Halbachsen R_1, R_2 ist also auf das Attraktionszentrum M hin gerichtet.

Zur Bestimmung des Achsenverhältnisses $r = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$ $(0 \leqq r \leqq 1)$ als Funktion der Winkelgeschwindigkeit erhalten wir durch eine leichte Umformung aus der Beziehung (3.9) die Gleichung dritten Grades in r

$$f(r) \equiv r^3 + \Omega r^2 + (\Omega - 1) r + \Omega = 0, \tag{3.13}$$

die ganz ähnlich der entsprechenden quadratischen Bestimmungsgleichung von r im ebenen Rocheschen Fall (vgl. I (2.16)) gebildet ist, und zugleich das Analogon für die beiden transzendenten Gleichungen II, (1.14), (1.15) darstellt.

Von ihren Wurzeln fallen höchstens zwei in das zur Diskussion stehende Intervall: $0 \leqq r \leqq 1$. Wegen $f(0) = \Omega$, $f(1) = 3\Omega$ $(\Omega > 0)$ kann nämlich in $\langle 0, 1 \rangle$ nur eine gerade Anzahl von Wurzeln liegen, also höchstens zwei (eine Doppelwurzel ist zweifach zu zählen).

Für hinreichend kleine Werte von Ω wird in (3.13) der Ausdruck $r^3 - r = r(r^2 - 1)$ im wesentlichen das Vorzeichen von $f(r)$ bestimmen, das für geeignete r wegen $0 \leqq r \leqq 1$ gewiß negativ ausfallen wird. Insbesondere gilt für $\Omega = 0$: $f(r) = r(r^2 - 1) < 0$ für $0 < r < 1$, und es ist $f(r) = 0$ nur für $r = 0$ und $r = 1$. Diesen Werten entspricht ein kreisförmiger und ein streckenförmiger Meridianschnitt.

Da $f(r) = F(r; \Omega)$ mit Ω monoton wächst, wird z. B. für $\Omega \leqq \frac{1}{5}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqq r^3 + \frac{r^2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{4}{5} r = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{40} < 0, \tag{3.14}$$

hingegen, falls $\Omega \geqq \frac{1}{3}$ ist,

$$f(r) \geqq r^3 + \frac{1}{3} r^2 - \frac{2}{3} r + \frac{1}{3} = r^3 + \frac{1}{3}(r-1)^2 > 0 \tag{3.15}$$

für alle r in $\langle 0, 1\rangle$, so daß im letzteren Fall ($\Omega \geqq \frac{1}{3}$) die Gleichung (3.13) keinen realisierbaren Wert für das Achsenverhältnis liefert, während aus (3.14) folgt, daß, wenn $\frac{1}{5} \geqq \Omega$ ist, (3.13) zwei untereinander verschiedene Wurzeln $\bar{r}$ und $\overset{+}{r}$ ($\bar{r} < \overset{+}{r}$) in $\langle 0, 1\rangle$ besitzt. Andererseits schließt man aus dem monotonen Wachstum der Funktion $F(r; \Omega)$, wenn r festgehalten wird und Ω monoton wächst, daß der Wert $\Omega = \mathring{\Omega}$, der zu der einzig möglichen Doppelwurzel $\bar{r} = \overset{+}{r} = \mathring{r}$ gehört, zugleich das Maximum aller Werte Ω darstellt, für die (3.13) reelle Wurzeln in $\langle 0, 1\rangle$ hat. Es gilt nach obigem

$$\frac{1}{5} < \mathring{\Omega} < \frac{1}{3}. \tag{3.16}$$

Man findet, um die Abszisse des Minimalwertes der Funktion $f(r)$ zu berechnen, zunächst

$$f'(r) = 3r^2 + 2\Omega r + \Omega - 1; \quad f''(r) = 6r + 2\Omega > 0 \text{ für alle } \begin{cases} r \\ \Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

und daraus

$$f'(r_*) = 0, \quad r_* = -\frac{\Omega}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3 - 3\Omega + \Omega^2},$$

$$\Omega = \frac{1 - 3r_*^2}{1 + 2r_*} > 0, \quad r_* < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{3.18}$$

Die Doppelwurzel $\mathring{r}$ repräsentiert einmal die Abszisse des Minimalwertes der Funktion $f(r) = F(r; \mathring{\Omega})$, ein andermal muß sie die Beziehung (3.9) erfüllen. Daher gilt

$$\frac{r(1 - \mathring{r}^2)}{1 + \mathring{r} + \mathring{r}^2} = \frac{1 - 3\mathring{r}^2}{1 + 2\mathring{r}}. \tag{3.19}$$

Es ist also $\mathring{r}$ die einzige in $\langle 0, 1\rangle$ wirklich vorhandene Wurzel der Gleichung

$$g(r) = r^4 + 2r^3 + 4r^2 - 1 = 0, \tag{3.20}$$

aus der wegen $g(0) = -1$, $g(1) = 6$, $g'(r) = 4r^3 + 6r^2 + 8r > 0$ zu schließen ist, daß ein und nur ein Wert $\mathring{r}$ vorliegt. Vermöge (3.9) wird ihm ein und nur ein Wert $\mathring{\Omega}$ derart zugeordnet, daß (3.13) für $\Omega > \mathring{\Omega}$ keine, für $\Omega = \mathring{\Omega}$ eine, für $\Omega < \mathring{\Omega}$ zwei Wurzeln $\bar{r}$, $\overset{+}{r}$ ($\bar{r} < \overset{+}{r}$) besitzt.

Es sei $\Omega' < \Omega''$. Hieraus und, weil $F(r; \Omega)$ mit Ω monoton wächst, folgt $\bar{r}' < \bar{r}''$, $\dot{\bar{r}}'' < \dot{\bar{r}}'$. Wir erhalten somit folgendes Resultat, wenn in (3.6) die Dichte f und die Zentralmasse M fest gegeben sind.

Bei sehr großer Entfernung L von der Zentralmasse M hat der Meridianschnitt Θ des Ringkörpers T nahezu die Gestalt eines Kreises, der sich bei monoton verringerndem L immer mehr abplattet. Jedoch kann die Entfernung nicht unter den Minimalwert $\mathring{L} = \sqrt[3]{\frac{M}{f\mathring{\Omega}}}$ herabsinken. Die Gesamtheit der so durch $\bar{r}$ definierten Ringkörper bildet eine lineare Reihe. Von der durch $r = \mathring{r}$ charakterisierten Figur $\mathring{T}$ geht für wachsende Werte von $\dot{\bar{r}}$, L noch eine weitere Reihe ab. Der Meridianschnitt dieser Figuren nimmt bei zunehmendem L eine immer mehr und mehr gestreckte Form an und erhält schließlich für sehr große L und sehr kleine Werte der Winkelgeschwindigkeit ω nahezu die Gestalt einer Strecke.

Damit sind zwei lineare Reihen von angenäherten Gleichgewichtsfiguren gewonnen, die den Ausgangspunkt für die Anwendung der strengen Methode bilden können.

§ 4.

Potential eines beliebigen Rotationskörpers T_1 in der Nachbarschaft erster Ordnung des Kreisringkörpers T mit ellipsenförmigem Meridianschnitt in einem Punkte seiner Oberfläche S_1.

Es möge S_1 eine (geschlossene) Rotationsfläche mit stetiger Normale in einer (hinreichend nahen) Nachbarschaft erster Ordnung von S bezeichnen, so daß die Normale (ν) in einem Punkt P auf S einen einzigen Durchstoßpunkt $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ auf S_1 bestimmt. Die Strecke $\overrightarrow{PP_1}$ werde nach außen positiv gezählt und mit $p\zeta$ bezeichnet. Dann ist offenbar (vgl. (2.14))

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \mathfrak{X} + a\,p\zeta = \mathfrak{X}\left(1 + \frac{p^2}{R_1^2}\zeta\right) = R_1\left(1 + \frac{p^2}{R_1^2}\zeta\right)\cos\psi, \\ \mathfrak{Z}_1 &= \mathfrak{Z} + c\,p\zeta = \mathfrak{Z}\left(1 + \frac{p^2}{R_2^2}\zeta\right) = R_2\left(1 + \frac{p^2}{R_2^2}\zeta\right)\sin\psi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

unter $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ die Koordinaten des in der Ebene $\mathfrak{E}$ gelegenen Punktes P_1 verstanden. Die Rolle der Gaußschen Parameter, die in der allgemeinen Theorie zur Darstellung der Ausgangsfläche herangezogen werden, mögen im vorliegenden Fall die exzentrische Anomalie ψ und der Azimutwinkel χ übernehmen. In der Ebene $\mathfrak{E}$ sei speziell $\chi = 0$. Es bezeichne $U(\psi, \chi)$ das Newtonsche Potential des Ringkörpers T in $(X, Y, Z) = (\psi, \chi)$, $U_1(\psi, \chi)$ entsprechend dasjenige von T_1 in $(X_1, Y_1, Z_1) = (\psi, \chi, \zeta)$. Für die

Differenz $U_1(\psi, \chi) - U(\psi, \chi)$ soll eine im wesentlichen nach Potenzen der hinreichend klein anzunehmenden unbekannten Funktion $\zeta = \zeta(\psi)$ und ihrer gleichfalls absolut hinreichend klein und stetig vorausgesetzten Ableitung $\frac{d\zeta}{d\psi}$ fortschreitende Entwicklung aufgestellt werden[52]). Durch Einschaltung einer in bezug auf den Parameter t stetigen Schar von Rotationsflächen S_t, die durch das System krummliniger Koordinaten $(\psi, \chi, t\zeta)$, $(0 \leqq t \leqq t^*, t^* > 1)$ definiert werden, zwischen S und S_1 lassen sich die folgenden Formeln herleiten

$$U_1(\psi, \chi) - U(\psi, \chi) = \int_0^1 \frac{\partial U_t}{\partial t}\, dt,$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial t} = \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t}\left(p'\zeta' \cos\varphi_t' - p\zeta\cos\theta_t'\right) d\sigma_t'.^{53}) \tag{4.2}$$

Hierbei bedeutet $P = (\psi, \chi)$ einen festen, $P' = (\psi', \chi')$ einen variablen Punkt auf S, P_t bzw. P_t' sind Durchstoßpunkte der Normalen (ν) in P an S durch S_t bzw. der Normalen (ν') in P' an S durch S_t, ϱ_t ist der Abstand der beiden auf S_t gelegenen Punkte P_t und P_t', $d\sigma_t'$ das Flächenelement auf S_t in P_t', U_t das Newtonsche Potenital des von S_t umschlossenen Ringkörpers T_t in P_t, endlich φ_t' bzw. θ_t' die von der Außennormale (ν_t') von S_t in P_t' mit (ν') bzw. (ν) gebildeten Winkel.

Da T und T_1 Rotationskörper sind, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, die Differenz $U_1 - U$ speziell in der Ebene $\mathfrak{E}$, also für die Punkte $P_1 = (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = (\psi, 0, \zeta)$, $P = (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = (\psi, 0, 0)$ anzusetzen. Die Schnittlinien der Ebene $\mathfrak{E}$ mit den Flächen S_t seien Σ_t, insbesondere mit der Fläche S_1: Σ_1.

Um die Entwicklung von $U_1 - U$ im wesentlichen auf die entsprechende Entwicklung im ebenen Rocheschen Fall zurückzuführen, also das räumliche an einer Rotationsfläche gebildete Problem cum grano salis in ein ebenes zu verwandeln, betrachten wir die Punkte $\bar{P}'$ und $\bar{P}_t'$, in die P' und P_t' übergeführt werden, wenn T und T_t um die z-Achse in die Ebene $\mathfrak{E}$ gedreht werden. Hierbei gelangt $\bar{P}'$ auf Σ, $\bar{P}_t$ auf Σ_t. Die Koordinaten von $\bar{P}'$ bzw. $\bar{P}_t'$ sind augenscheinlich $(\psi', 0, 0)$ bzw. $(\psi', 0, t\zeta')$. Es mögen $l, l_t; l', l_t'$ die Abstände der Punkte $P, P_t; P', P_t'$ von der z-Achse bedeuten. Die Außennormale in $\bar{P}_t'$ an S_t sei $(\bar{\nu}_t')$. Die von (ν_t') mit der z-Achse und der Normale (ν) gebildeten Winkel werden mit τ_t' und ϑ_t' bezeichnet. Da θ_t' für $\chi' = 0$ in ϑ_t' übergeht, und die Richtungskosinus von (ν) ja (vgl. (2.14)) $a, 0, c$ sind, diejenigen von (ν_t') aber $\sin\tau_t' \cos\chi'$,

---

[52]) Die Funktion ζ ist von χ unabhängig, da wir S_1 ja als Rotationsfläche vorausgesetzt haben. Man vgl. zum Folgenden L. Lichtenstein, loc. cit. [8]), III, S. 95.

[53]) Vgl. § 9 des ersten Teiles.

$\sin\tau_t' \sin\chi'$, $\cos\tau_t'$, gilt

$$\begin{aligned}(4.3)\qquad \cos\vartheta_t' &= c\cdot\cos\tau_t' + a\sin\tau_t'\cos\chi' \\ &= c\cdot\cos\tau_t' + a\sin\tau_t' + a\sin\tau_t'(\cos\chi'-1) \\ &= \cos(\tau_t'-\tau_0) - 2a\sin\tau_t'\sin^2\frac{\chi'}{2} \\ &= \cos\vartheta_t' - 2a\sin\tau_t'\sin^2\frac{\chi'}{2},\end{aligned}$$

demnach wegen (4.2)

$$\begin{aligned}(4.4)\qquad \frac{\partial U_t}{\partial t} &= \int_{S_t}\frac{1}{\varrho_t}(p'\zeta'\cos\varphi_t' - p\zeta\cos\vartheta_t')\,d\sigma_t' \\ &\quad + 2p\zeta a\int_{S_t}\sin\tau_t'\sin^2\frac{\chi'}{2}\cdot\frac{1}{\varrho_t}\,d\sigma_t' = \Delta_1+\Delta_2.\end{aligned}$$

Aus den Beziehungen (2.1) und (4.4) folgt jetzt

$$(4.5)\qquad \Delta_1 = \int_{\Sigma_t}(p'\zeta'\cos\varphi_t' - p\zeta\cos\vartheta_t')\Big[2\log\frac{8l_t'}{\bar\varrho_t} + O\Big(\frac{\bar\varrho_t}{l_t'}\log\frac{8l_t'}{\bar\varrho_t}\Big)\Big]ds_t',$$

wobei $\bar\varrho_t$ den Abstand der Punkte $P_t=(\psi, 0; t\zeta)$ und $\bar P_t'=(\psi', 0, t\zeta')$ auf Σ_t, ds_t' das Bogenelement auf Σ_t in $\bar P_t'$ bezeichnet. Für $t=0$ gibt $\bar\varrho_0=\bar\varrho$ den Abstand der Punkte $P=(\psi, 0; 0)$ und $\bar P'=(\psi', 0; 0)$ auf Σ an. Eine leichte Umformung ergibt nun

$$\begin{aligned}(4.6)\qquad \Delta_1 &= 2\int_{\Sigma_t}(p'\zeta'\cos\varphi_t' - p\zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{8L}{\bar\varrho_t}\,ds_t' \\ &+\int_{\Sigma_t}(p'\zeta'\cos\varphi_t' - p\zeta\cos\vartheta_t')\Big[2\log\frac{l_t'}{L} + O\Big(\frac{\bar\varrho_t}{l_t'}\log\frac{8l_t'}{\bar\varrho_t}\Big)\Big]ds_t' = \Delta_3+\Delta_4.\end{aligned}$$

Bedeuten $\mathfrak{x}_t$, $\mathfrak{z}_t$ und $\mathfrak{x}_t'$, $\mathfrak{z}_t'$ die kartesischen Koordinaten der auf Σ_t gelegenen Punkte P_t und P_t', so gilt zunächst

$$\begin{aligned}&l_t = L+\mathfrak{x}_t,\qquad \bar\varrho_t=(\mathfrak{x}_t'-\mathfrak{x}_t)^2+(\mathfrak{z}_t'-\mathfrak{z}_t)^2, \\ (4.7)\qquad &\log\frac{l_t'}{L} = \frac{\mathfrak{x}_t'}{L}+\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{x}_t'}{L^2}+\ldots = O\Big(\frac{\mathfrak{x}_t'}{L}\Big)=O\Big(\frac{R}{L}\Big),\qquad \frac{\bar\varrho_t}{l_t'}=O\Big(\frac{R}{L}\Big)\end{aligned}$$

und infolgedessen

$$(4.8)\qquad \Delta_4 = \int_{\Sigma_t}(p'\zeta'\cos\varphi_t' - p\zeta\cos\vartheta_t')\cdot\Big[O\Big(\frac{R}{L}\Big)+O(k)\Big]ds_t'.$$

Für $|\zeta|\leqq\varepsilon_1$ folgt hieraus die Ungleichheit

$$(4.9)\qquad \Big|\int_0^1\Delta_4\,dt\Big| < k_*\,\varepsilon_1\Big|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\Big| \qquad (k_* \text{ konstant}).$$

Der Integralausdruck $\int_0^1\Delta_3\,dt$ gestattet eine zu I, (9.2) völlig analoge

Entwicklung der Form

$$\int_0^1 \Delta_3\, dt = \mathfrak{U}^{(1)} + \mathfrak{U}^{(2)} + \mathfrak{U}^{(3)} + \ldots, \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{U}^{(n)} = \frac{2}{n!}\int_{\Sigma}\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\log\frac{8L}{\varrho_t}\left[p'\zeta'\cos\varphi_t' - p\zeta\cos\vartheta_t'\right]\right)\right\}_{t=0} ds',$$

$$\mathfrak{U}^{(1)} = 2p\zeta\frac{\partial}{\partial\nu}\mathfrak{U} + 2\int_{\Sigma} p'\zeta'\log\frac{8L}{\varrho}\,ds', \qquad \mathfrak{U} = D - A\mathfrak{X}^2 - B\mathfrak{Z}^2.$$

Nunmehr erhalten wir nach (4.2)

$$U_1 - U = \int_0^1 (\Delta_1 + \Delta_3)\, dt = \int_0^1 (\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_2)\, dt \tag{4.11}$$

$$= 2p\zeta\frac{\partial}{\partial\nu}\mathfrak{U} + 2\int_{\Sigma} p'\zeta'\log\frac{8L}{\varrho}\,ds' + \mathfrak{U}^{(2)} + \mathfrak{U}^{(3)} + \ldots + \int_0^1 \Delta_4\, dt + \int_0^1 \Delta_2\, dt.$$

In ganz ähnlicher Weise wie bei den Ringfiguren ohne Zentralkörper läßt sich zeigen, daß auch der Ausdruck $\int_0^1 \Delta_2\, dt$ einer Ungleichheit der Form (4.9) genügt[54]). Ebenso findet man wie bei jenen Betrachtungen die für den Existenzbeweis wesentlichen Ungleichheitsbeziehungen.

Setzt man

$$\mathfrak{U}^{(2)} + \mathfrak{U}^{(3)} + \ldots = \Omega^{(1)}(\zeta) \tag{4.12}$$

und ist $p\zeta$ eine andere nebst ihrer Ableitung auf Σ stetige Funktion, so daß

$$|p\zeta|,\ \left|\frac{d(p\zeta)}{d\psi}\right|,\ |p\dot\zeta|,\ \left|\frac{d(p\dot\zeta)}{d\psi}\right| \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0, \tag{4.13}$$

ist, und es möge

$$|\zeta - \dot\zeta|,\ \left|\frac{d\zeta}{d\psi} - \frac{d\dot\zeta}{d\psi}\right| < m \tag{4.13'}$$

sein, so gilt

$$|\Omega^{(1)}|,\ \left|\frac{d\Omega^{(1)}}{d\psi}\right| < \tilde k\,\varepsilon^2 \qquad (\alpha^*,\ \tilde k \text{ konstant})^{55}), \tag{4.14}$$

$$|\Omega^{(1)}\{p\zeta\} - \Omega^{(1)}\{p\dot\zeta\}|,\ \left|\frac{d}{d\psi}\Omega^{(1)}\{p\zeta\} - \frac{d}{d\psi}\Omega^{(1)}\{p\dot\zeta\}\right| < \alpha^*\varepsilon m.$$

Schreibt man die Festsetzung (3.7) in der Gestalt

$$2A = 2B\frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(3 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right), \tag{4.15}$$

---

[54]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [8]), III. Abh., S. 94 und 114 ff.

[55]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [5]), III. Abh., S. 93 und 94.

so ergibt sich mit Hilfe der Formeln (2.8), (4.10)

$$(4.16)\qquad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \nu} = -2\left[A\mathfrak{X}a + B\mathfrak{Z}c\right] = -2p\left[A\frac{\mathfrak{X}^2}{R_1^2} + B\frac{\mathfrak{Z}^2}{R_2^2}\right]$$

$$= -2p\left[BR_2^2\frac{\mathfrak{X}^2}{R_1^4} + BR_2^2\frac{\mathfrak{Z}^2}{R_2^4}\right] - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}p\left(3 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\frac{\mathfrak{X}^2}{R_1^2}$$

$$= -2pBR_2^2\left[\frac{\mathfrak{X}^2}{R_1^4} + \frac{\mathfrak{Z}^2}{R_2^4}\right] - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(3 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)a\mathfrak{X}$$

$$= -2\frac{BR_2^2}{p} - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(3 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)a\mathfrak{X}$$

$$= -\pi\frac{R_1R_2}{p}(1-r) - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(3 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)a\mathfrak{X}.$$

§ 5.

Aufstellung der fundamentalen Integro-Differentialgleichung.

Wir haben jetzt die Mittel an der Hand, um die für die Theorie charakteristische Integro-Differentialgleichung aufzustellen. Wir denken uns nun wieder den in der Nachbarschaft erster Ordnung von T gelegenen ringförmigen Rotationskörper wie früher T mit homogener Flüssigkeitsmasse der Dichte f erfüllt und wie ein starrer Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1, deren Wert sich wenig von ω unterscheidet, um die z-Achse rotieren. Damit bei dieser Bewegung, bei der auf T_1 die Eigengravitation, die Zentrifugalkräfte und die Attraktion der Zentralmasse M einwirken, sich das System M, T_1 — auf ein mitrotierendes Achsensystem bezogen — im Gleichgewicht befindet, muß auf S_1

$$(5.1)\qquad U_1(\psi, 0) + \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(L + \mathfrak{X}_1)^2 + \mathfrak{G}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = s_1 \qquad (s_1 \text{ konstant})$$

sein. Durch Subtraktion ergibt sich aus den Beziehungen (1.3) und (5.1)

$$(5.2)\quad U_1(\psi, 0) - U(\psi, 0) + \frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(L + \mathfrak{X}_1)^2 - \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(L + \mathfrak{X})^2 + \mathfrak{G}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{G}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = s_1 - s_0 - \Psi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$$

Nach (3.3) und (4.1) wird

$$(5.3)\qquad \mathfrak{G}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{G}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$$

$$= \frac{M}{2fL^3}\left[2(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_1)L + 2(\mathfrak{X}_1^2 - \mathfrak{X}^2) + (\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Z}_1^2) + R^2\zeta O(h)\right]$$

$$= \frac{M}{2fL^3}\left[-2p\zeta aL + 2(2p\zeta a\mathfrak{X} + a^2p^2\zeta^2) - 2p\zeta c\mathfrak{Z} - c^2p^2\zeta^2 + R^2\zeta O(h)\right].$$

Setzen wir noch

$$\frac{\omega_1^2-\omega^2}{2\varkappa f}=\lambda\frac{q}{2}\frac{R}{L}=\frac{q}{2}\lambda h,^{56}) \tag{5.4}$$

so erhalten wir gleichfalls wegen (4.1)

$$\frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}[L+\mathfrak{X}_1]^2-\frac{\omega^2}{2\varkappa f}[L+\mathfrak{X}]^2=\frac{q}{2}\lambda h[L^2+2L\mathfrak{X}+\mathfrak{X}^2] \tag{5.5}$$

$$+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}2ap\zeta(L+\mathfrak{X})+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}a^2p^2\zeta^2+\frac{q}{2}\lambda h\,2ap\zeta(L+\mathfrak{X})+\frac{q}{2}\lambda h a^2p^2\zeta^2.$$

Unter Verwendung der Festsetzung (3.6) wird

$$\frac{\omega_1^2}{2\varkappa f}(L+\mathfrak{X}_1)^2-\frac{\omega^2}{2\varkappa f}(L+\mathfrak{X})^2+\mathfrak{G}(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{Z}_1)-\mathfrak{G}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z}) \tag{5.6.}$$

$$=\frac{\omega^2}{2\varkappa f}[2p\zeta(3a\mathfrak{X}-c\mathfrak{Z})+p^2\zeta^2(3a^2-c^2)]+\frac{q}{2}\lambda h[L^2+2L\mathfrak{X}+\mathfrak{X}^2]$$

$$+\frac{q}{2}\lambda h[2p\zeta a(L+\mathfrak{X})+p^2\zeta^2a^2].$$

Wegen (4.16) lautet (4.11) nach einer leichten Umformung

$$U_1-U=-2\pi R_1R_2(1-r)\zeta+2\int_{\mathfrak{S}}p'\zeta'\log\frac{R_1}{\varrho(1+r)}ds' \tag{5.7}$$

$$-\frac{\omega^2}{2\varkappa f}2p\zeta\left(3+\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)a\mathfrak{X}+2\log\frac{8L}{R_1}(1+r)\int_{\mathfrak{S}}p'\zeta'ds'$$

$$+\int_0^1(\Delta_4+\Delta_2)dt+\mathfrak{U}^{(2)}+\mathfrak{U}^{(3)}+\dots.$$

Wir setzen jetzt

$$s=s_0-s_1+\frac{q}{2}RL\lambda+2\log\frac{8L}{R_1}(1+r)\int_{\mathfrak{S}}p'\zeta'ds' \qquad (s\text{ klein}) \tag{5.8}$$

und erhalten an Stelle der Beziehung (5.2)

$$2\pi R_1R_2(1-r)\zeta-2\int_{\mathfrak{S}}p'\zeta'\log\frac{R_1}{\varrho(1+r)}ds'=s-\frac{\omega^2}{2\varkappa f}2p\zeta\left(c\mathfrak{Z}+\frac{R_2^2}{R_1^2}a\mathfrak{X}\right) \tag{5.9}$$

$$+\frac{q}{2}\lambda h[2L\mathfrak{X}+\mathfrak{X}^2]+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}p^2\zeta^2(3a^2-c^2)+\frac{q}{2}\lambda h\,2p\zeta a(L+\mathfrak{X})$$

$$+\frac{q}{2}\lambda hp^2\zeta^2a^2+\Psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})+\int_0^1(\Delta_4+\Delta_2)dt+\mathfrak{U}^{(2)}+\mathfrak{U}^{(3)}+\dots.$$

Durch eine leichte Umrechnung ergibt sich

$$c\mathfrak{Z}+\frac{R_2^2}{R_1^2}a\mathfrak{X}=p\left[\frac{\mathfrak{Z}^2}{R_2^2}+\frac{R_2^2}{R_1^2}\frac{\mathfrak{X}^2}{R_1^2}\right]=pR_2^2\left[\frac{\mathfrak{Z}^2}{R_2^4}+\frac{\mathfrak{X}^2}{R_1^4}\right]=\frac{R_2^2}{p} \tag{5.10}$$

---

56) Auch hier gelten entsprechende Betrachtungen wie in Fußnote 13).

und daher unter Berücksichtigung der Relation (3.9)

$$(5.11)\qquad \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\,2p\,\zeta\left(c\,\mathfrak{Z}+\frac{R_2^2}{R_1^2}\,a\,\mathfrak{X}\right)=\pi R_1 R_2\,\zeta\,\frac{r(1-r)^2}{1+r+r^2}.$$

Man findet demnach unmittelbar

$$(5.12)\qquad 2\pi R_1 R_2(1-r)\zeta+\pi R_1 R_2\,\zeta\,\frac{r(1-r)^2}{1+r+r^2}=\pi R_1 R_2\,\zeta\,\frac{(1-r^2)(2+r)}{1+r+r^2}.$$ [57])

Mithin geht jetzt (5.9) über in

$$(5.13)\qquad \pi R_1 R_2\,\frac{(1-r^2)(2+r)}{1+r+r^2}\,\zeta-2R_1R_2\int_0^{2\pi}\zeta'\log\frac{R_1}{\varrho\,(1+r)}\,d\psi'=s+q\lambda R\,\mathfrak{X}$$

$$+\frac{q}{2}\lambda h\,\mathfrak{X}^2+\Psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})+\frac{\omega^2}{2\varkappa f}\,p^2\zeta^2(3a^2-c^2)+q\lambda h p\,\zeta\,a(L+\mathfrak{X})$$

$$+\int_0^1(\Delta_4+\Delta_2)\,dt+\frac{q}{2}\lambda h p^2\zeta^2 a^2+\mathfrak{U}^{(2)}+\mathfrak{U}^{(3)}+\ldots.$$

Dies ist nun die für das Problem maßgebende nichtlineare Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ. Die rechte Seite weist entweder Ausdrücke, die mit den kleinen Parametern $s, \lambda, h=\frac{R}{L}$, $k=\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}$ behaftet sind, oder aber Glieder, die ζ von mindestens zweiter Ordnung enthalten, auf.

§ 6.

Die homogene Integralgleichung.

Durch Nullsetzen der rechten Seite von (5.13) gewinnen wir die homogene lineare Integralgleichung:

$$(6.1)\qquad \pi R_1 R_2\,\frac{(1-r^2)(2+r)}{1+r+r^2}\,\zeta-2R_1R_2\int_0^{2\pi}\zeta'\log\frac{R_1}{\varrho\,(1+r)}\,d\psi'=0,$$

bzw.

$$(6.2)\qquad \zeta-\frac{2(1+r+r^2)}{\pi(1-r^2)(2+r)}\int_0^{2\pi}\zeta'\log\frac{R_1}{\varrho\,(1+r)}\,d\psi'=0.$$

Den Ergebnissen des ersten Teiles § 4 zufolge hat die um den reellen Parameter k_n erweiterte Integralgleichung

$$(6.3)\qquad v_n-k_n\int_0^{2\pi}v_n'\log\frac{R_1}{\varrho\,(1+r)}\,d\psi'=0$$

---

[57]) Für $R_1=R_2$, d. h. $r=0$ geht dieser Ausdruck in den loc. cit. [8]), dritte Abhandlung, S. 111 angeführten Ausdruck $2\pi R\zeta$ über. Man beachte, daß wir $P\overrightarrow{P_1}=p\,\zeta=\bar{\zeta}$ gesetzt hatten, und für $R_1=R_2$ die Funktion $p=p(\psi)$ in die Konstante R übergeht.

die zu den einfachen Eigenwerten

$$k_n: \frac{1}{\pi(1+r)}, \frac{1}{\pi(1-r)}; \ldots; \frac{n}{\pi(1+r^n)}, \frac{n}{\pi(1-r^n)}; \ldots \tag{6.4}$$

gehörenden, gemäß

$$\int_0^{2\pi} v_n^2 d\psi = 1 \tag{6.5}$$

normierten Eigenfunktionen

$$\frac{\cos\psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin\psi}{\sqrt{\pi}}; \ldots; \frac{\cos n\psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\psi}{\sqrt{\pi}}; \ldots . \tag{6.6}$$

Damit (6.1) eine Nullösung besitzt, ist also notwendig und hinreichend, daß die Bestimmungsgleichung in r

$$k_n = \frac{2(1+r+r^2)}{\pi(1-r^2)(2+r)} \tag{6.7}$$

erfüllt ist. Ausführlicher geschrieben, bestehen folgende Bedingungen

$$\frac{1+r^n}{n} = \frac{(1-r^2)(2+r)}{2(1+r+r^2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.8}$$

bzw.

$$\frac{1-r^n}{n} = \frac{(1-r^2)(2+r)}{2(1+r+r^2)}. \tag{6.9}$$

Diese Gleichungen, die wie in I. ausführlich zu diskutieren sind, können höchstens abzählbar unendlich viele singuläre Werte $r = r_n$ liefern.

Im regulären Fall läßt sich der Existenzbeweis wie im ersten Teil führen.

Wir untersuchen zuerst die Gleichung (6.9). Sie hat außer den trivialen Wurzeln $r = 0$ für $n = 1$, $r = 1$ für alle n keine weiteren dem Intervall $\langle 0, 1\rangle$ angehörenden Lösungen. Wir schreiben

$$g(r) = n\frac{(1+r)(2+r)}{2(1+r+r^2)} - \frac{1-r^n}{1-r}, \tag{6.10}$$

so daß (6.9) mit $g(r) = 0$ äquivalent wird. Da wegen $r < 1$ $(r \neq 0, 1)$

$$\frac{(1+r)(2+r)}{2(1+r+r^2)} = \frac{2+3r+r^2}{2+2r+2r^2} > 1, \quad \frac{1-r^n}{1-r} = 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1} < n \tag{6.11}$$

und folglich

$$g(r) > 0 \tag{6.12}$$

gilt, liegt in $(0, 1)$ keine Wurzel von (6.9).

Schreibt man (6.8) in der Form

$$\begin{aligned} f_n(r) = 2 + 2r + 2r^2 + 2nr^2 + nr^3 \\ + 2r^n + 2r^{n+1} + 2r^{n+2} - 2n - nr = 0, \end{aligned} \tag{6.13}$$

so ist am Rande des fraglichen Intervalls

$$(6.14)\quad f_n(0) = 2(1-n) < 0 \quad \text{für} \quad n > 1, \qquad f_n(1) = 12 > 0 \text{ für alle } n,$$

und $f_n(r)$ hat in $\langle 0, 1\rangle$ eine ungerade Anzahl von Wurzeln.

Die Ableitung

$$(6.15)\quad f_n'(r) = 2 + 4r + 4nr + 3nr^2 + 2nr^{n-1} + 2(n+1)r^n + 2(n+2)r^{n+1} - n$$

hat am Rande des Intervalls die Werte

$$(6.16)\quad f_n'(0) = 2 - n < 0 \quad \text{für} \quad n > 2, \qquad f_n'(1) = 10 + 12n > 0 \text{ für alle } n.$$

Weil nun aber für alle n

$$(6.17)\quad f_n''(r) = 4 + 4n + 6nr + 2n(n-1)r^{n-2} + 2n(n+1)r^{n-1} + 2(n+2)(n+1)r^n > 0$$

ist, wechselt $f'(r)$ in $\langle 0, 1\rangle$ genau einmal das Zeichen. Mit (6.16) und (6.14) ergibt dies: die Kurve $f_n(r)$, die in 0 unter der Abszissenachse verläuft, fällt mit wachsendem r anfangs, um für einen gewissen Wert $r = \check{r}$ ein Minimum anzunehmen, und steigt dann monoton zu positiven Werten auf, sie kann also nur einmal die r-Achse schneiden und tut es auch. Mit anderen Worten, für alle $n = 3, 4, 5, \ldots$ besitzt (6.8) jedesmal eine und nur eine Wurzel r_n.

Im Fall $n = 2$ ist $f_n'(0) = 0$, $f_n'(1) > 0$, $f_n''(r) > 0$, also die Ableitung $f_n'(r) > 0$ außer für $r = 0$: die Kurve $f_n(r)$ steigt dauernd von negativen zu positiven Werten auf und schneidet dabei ein einziges Mal die Abszissenachse. Die Gleichung (6.8) hat auch jetzt ($n = 2$) genau eine Wurzel r_2 in $(0, 1)$. Für $n = 1$ kommt, wie man sofort sieht, außer $r_1 = 0$ keine Lösung in Frage.

Bildet man vermöge (6.13) für ein und denselben Punkt einmal die Funktion $f_n(r)$, einmal $f_{n+1}(r)$, so liest man mühelos ab, daß die Ungleichheit

$$(6.18)\qquad f_n(r) - f_{n+1}(r) > 0$$

besteht, aus der in Übereinstimmung mit dem I. Teile

$$(6.19)\qquad r_n < r_{n+1} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

folgt.

Alles in allem: *die Beziehung* (6.8) *hat stets eine und nur eine in* $(0, 1)$ *gelegene Wurzel* r_n, *in der Reihe der Ringkörper gibt es abzählbar unendlich viele, nämlich die zu* r_n $(n = 2, 3, \ldots)$ *gehörigen, singuläre, möglicherweise zu Verzweigungen Anlaß gebende Ringfiguren, für welche*

die homogene Integralgleichung (6.1) bzw. (6.2) *nichttriviale Nullösungen der Form*

$$u_3^{(n)} = \frac{\cos n\psi}{\sqrt{\pi}} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{6.20}$$

besitzt. Die Integralgleichung (6.1) hat übrigens keine trivialen (d. h. für alle r gültigen) Nullösungen.

Wie man sich leicht überzeugt, führt (6.8) für $n = 2$ auf die Beziehung (3.20), so daß also dem Maximum der Winkelgeschwindigkeit, wo die beiden Ausgangsreihen zusammenhängen, — analog den Ergebnissen in Teil I und II — die Nullösung

$$u_3^{(2)} = \frac{\cos 2\psi}{\sqrt{\pi}} \tag{6.21}$$

entspricht. Es ist nicht schwer, zu erkennen, daß sich der Existenzbeweis im Falle $n = 2$ wieder genau so wie in I oder II führen läßt, da auf der rechten Seite der Integro-Differentialgleichung $u_3^{(2)}$ in $\lambda \mathfrak{X}^2$ von ζ frei auftritt. *Also gibt es dort keine weiteren reellen Gleichgewichtsfiguren.*

Leipzig, den 8. November 1931.

(Eingegangen am 8. November 1931.)

Über eine independente Darstellung der Singularitätenanzahlen einer ebenen algebraischen Kurve.

Von

W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.

Da jede zusammengesetzte Singularität einer ebenen (irreduziblen) algebraischen Kurve äquivalent ist mit einer gewissen Anzahl einfacher Singularitäten, dürfen wir uns auf letztere beschränken.

Es bezeichne d die Anzahl der Doppelpunkte, δ die der Doppeltangenten, r die der Spitzen und ϱ die der Wendepunkte; andererseits sei n die Ordnung, ν die Klasse und p das Geschlecht der Kurve.

Dann bestehen zwischen $n, \nu, d, r, \delta, \varrho$ die vier Plückerschen Formeln und zwischen allen sieben Anzahlen die beiden Clebschschen Formeln.

Größerer Übersichtlichkeit halber denke man sich in jeder der Formeln alle Glieder auf die eine Seite geschafft und diese als selbständige Form eingeführt.

Damit entstehen die vier Plückerschen Formen $\mathsf{N}, N, \mathsf{P}, R$, nebst den beiden Clebschschen Formen P, Π.

Aber diese sechs Formen sind nicht unabhängig voneinander. Vielmehr sind die vier ersteren Formen einer Identität (Syzygie) unterworfen und alle sechs Formen einer zweiten (**1.**). Es empfiehlt sich daher, jene sechs Formen durch vier unabhängige gleicher Bauart, $\Delta, D, \mathsf{P}', R'$, zu ersetzen (**2.**). Die neuen Formen drücken sich durch die alten, und umgekehrt, in einfacher Weise aus.

Setzt man die vier neuen Formen gleich Null, so liegen vier unabhängige Gleichungen in den sieben Unbekannten $n, \nu, \delta, d, \varrho, r, p$ vor (**3.**).

Man wird daher vermöge Auflösung jener Gleichungen die vier Zahlen δ, d, ϱ, r durch die drei unabhängigen Parameter n, ν, p ausdrücken.

Während aber von den drei Parametern n, ν, p etwa der erste, n, willkürlich (> 2) wählbar ist, sind die beiden anderen an gewisse Grenzbedingungen gebunden, deren Ermittelung die Hauptaufgabe ist.

Was ν betrifft, so ist sein größter Wert $\nu_a = n(n-1)$, dagegen der kleinste ν_i gleich der um 1 — in einem singulären Falle um 2 — zu vermehrenden, an $+\sqrt{n}$ nächstgelegenen natürlichen Zahl (**4.**). Dabei kann ν alle Werte des Intervalles (ν_i, ν_a) durchlaufen, mit Ausnahme eben des singulären Falles $\nu_a - 1$.

Verwickelter gestaltet sich die Aufsuchung der Grenzen des Geschlechtes p.

Hier empfiehlt es sich, bei festgehaltenem n, die Wertreihe der ν in vier Intervalle zu zerlegen und diesen statt der Zahlen δ, d, ϱ, r die nur noch von ν abhängigen Zahlen $\delta_p = \delta + 3p$, $d_p = d + 3p$, $\varrho_p = \varrho - 2p$, $r_p = r - 2p$ zugrunde zu legen (**5.**).

Dann stellt sich, unter Verwendung des zahlentheoretischen Zeichens E, heraus (**6.—10.**), daß p innerhalb je eines der vier Intervalle eine Reihe von spezifischem Charakter durchläuft. Für p_i als den jeweils kleinsten, p_a als den größten Wert hat man für p die Reihe:

$$p_i,\ p_i + 1,\ p_i + 2,\ \ldots,\ p_i + (p_a - p_i) = p_a.$$

Die so entstehende Tabelle (VI) (**9.**) gilt zunächst für den allgemeinen oder regulären Fall, wo $\nu + n > 9$ ist.

Die Sonderfälle, wo $\nu + n \leqq 9$, bedürfen einer spezifischen Untersuchung (**11.**, **12.**). Trotz verschiedener Modifikationen, die bei den Sonderfällen eintreten, ergibt sich, daß die Hauptregeln der Tabelle (VI) auch dann noch erhalten bleiben (**13.**). Endlich läßt sich die Tabelle (VI) auf analoge Tabellen für die Zahlen δ, d, ϱ, r übertragen (**14.**).

Im übrigen sei betont, daß die angegebenen Darstellungen rein arithmetischer Natur sind und ihre geometrische Realisierung, wenigstens in besonderen Fällen, noch einer besonderen Untersuchung bedürfte.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Die vier Plückerschen Formen N, N, P, R nebst den beiden Clebschschen Formen P, Π, mit ihren zwei Syzygien.

2. Einführung von vier neuen unabhängigen Formen Δ, D, P', R'. Beziehungen zwischen den alten und neuen Formen.

3. Die vier neuen Singularitätenrelationen. Darstellung der vier Singularitätenanzahlen δ, d, ϱ, r in den drei unabhängigen Parametern n, ν, p.

4. Die Grenzen ν_i, ν_a und der Verlauf von ν.

5. Ansatz zur Bestimmung der Grenzen und des Verlaufes von p. Einführung von vier neuen, bei festgehaltenem n nur noch von ν abhängigen Zahlen $\delta_p, d_p, \varrho_p, r_p$.

6. Diskussion der Anfangswerte $\delta_p(\nu_i)$, $d_p(\nu_i)$, $\varrho_p(\nu_i)$, $r_p(\nu_i)$.

7. Die vier Intervalle für p.

8. Vorzeichenbestimmungen für $\delta_p, d_p, \varrho_p, r_p$ in den vier Intervallen.

9. Die Grenzen und der Verlauf von p in den vier Intervallen. Die Tabelle (VI).

10. Die Verträglichkeit der Grenzen von p.

11. Diskussion von Sonderfällen ($\nu + n \leqq 9$).
12. Modifikationen der Tabelle (VI) in den Sonderfällen.
13. Erhaltung der Hauptregeln der Tabelle (VI) in den Sonderfällen.
14. Übertragung der Tabelle (VI) auf die Zahlen δ, d, ϱ, r.
15. Geometrische Realisierungen.

1. Zwischen den Anzahlen der Singularitäten einer ebenen algebraischen irreduziblen Kurve c bestehen die vier Plückerschen „Urformeln“ $\mathsf{N} = 0$, $N = 0$, $\mathsf{P} = 0$, $R = 0$, wo unter $\mathsf{N}, N, \mathsf{P}, R$ die vier „Urformen“ zu verstehen sind:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \mathsf{N} &\equiv n^2 - (\nu + n) - (2d + 3r), \\ N &\equiv \nu^2 - (\nu + n) - (2\delta + 3\varrho), \\ \mathsf{P} &\equiv 3n^2 - 6n - (6d + 8r) - \varrho, \\ R &\equiv 3\nu^2 - 6\nu - (6\delta + 8\varrho) - r. \end{aligned}$$

Hier bedeuten: n die Ordnung, d die Anzahl der Doppelpunkte, r die der Rückkehrpunkte (Spitzen), und dual ν die Klasse, δ die Anzahl der Doppeltangenten, ϱ die der Wendetangenten (oder auch der Wendepunkte).

Da sich die Gleichungen $\mathsf{N} = 0$, $N = 0$, $\mathsf{P} = 0$, $R = 0$ als vier in den Unbekannten δ, d, ϱ, r lineare auffassen lassen, so könnte es scheinen, als ob man einfach nur nach letzteren Größen aufzulösen hätte, und aus diesen Lösungen, bei variierenden n, ν, diejenigen auszusondern, die ganzzahlige positive Werte (inkl. 0) besitzen.

Die vier Urformen (I) sind indessen nicht unabhängig voneinander, sondern an eine Identität (Syzygie) gebunden. Diese lautet, wie man sich leicht überzeugt[1]):

$$\text{(1)} \qquad \mathsf{P} + R \equiv 3(\mathsf{N} + N).$$

Ferner bestehen nach Clebsch für das Geschlecht p der Kurve c die beiden zueinander dualen „Geschlechtsformeln“ $P = 0$, $\Pi = 0$, unter P, Π die beiden „Geschlechtsformen“ verstanden:

$$\text{(I')} \qquad \begin{aligned} P &\equiv n^2 - 3n + 2 - 2(d + r) - 2p, \\ \Pi &\equiv \nu^2 - 3\nu + 2 - 2(\delta + \varrho) - 2p. \end{aligned}$$

Auch diese Formen P, Π müssen mit den Urformen (I) durch eine Syzygie verknüpft sein.

Um diese abzuleiten, beachte man, daß die Differenz $P - \Pi$ zugleich mit den vier Urformen verschwindet, und daß alle diese Formen in δ, d, ϱ, r linear, in n resp. ν quadratisch sind.

[1]) Will man (1) systematisch ableiten, so setze man zwischen den Formen $\mathsf{N}, N, \mathsf{P}, R$ eine lineare Identität mit numerischen Faktoren an. Letztere genügen auf Grund der Koeffizientenvergleichung einem Systeme linearer Bedingungen, deren einzige Lösung eben die in (1) auftretende ist.

Da überdies $P - \Pi$ bei Vertauschung der Größen n, d, r mit den dualen ν, δ, ϱ nur das Vorzeichen ändert, das nämliche aber auch von den Differenzen $N - \mathsf{N}$ und $R - \mathsf{P}$ gilt, so wird man den Ansatz machen:

$$P - \Pi \equiv a(N - \mathsf{N}) + b(R - \mathsf{P}),$$

mit a, b als numerischen Faktoren.

Führt man hier die Differenzen $N - \mathsf{N}$ und $R - \mathsf{P}$ gemäß (I) explizite aus, so erkennt man sofort, daß die gesuchte Syzygie lautet:

$$2(P - \Pi) \equiv (N - \mathsf{N}) + (\mathsf{P} - R). \tag{2}$$

2. Es ist wünschenswert, die durch zwei Syzygien verbundenen sechs Urformen $\mathsf{N}, N, \mathsf{P}, R, P, \Pi$ durch vier voneinander unabhängige gleicher Bauart zu ersetzen.

Zu dem Behuf sehe man die Formeln für N und P in (I) und (I′) als zwei in den Unbekannten d, r lineare Gleichungen an und löse sie nach jenen auf. Es ergeben sich so die Darstellungen:

$$\begin{aligned} r &= (-\nu + 2n - 2 + 2p) - (\mathsf{N} - P), \\ 2d &= \{(n-1)(n-6) + 2\nu - 6p\} + (2\mathsf{N} - 3P). \end{aligned} \tag{3}$$

Analog erhält man vermöge der dualen Rechnung:

$$\begin{aligned} \varrho &= (-n + 2\nu - 2 + 2p) - (N - \Pi), \\ 2\delta &= \{(\nu-1)(\nu-6) + 2n - 6p\} + (2N - 3\Pi). \end{aligned} \tag{3′}$$

Man führe dementsprechend die vier neuen Formen ein:

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv (\nu-1)(\nu-6) + 2n - 6p - 2\delta, \\ D &\equiv (n-1)(n-6) + 2\nu - 6p - 2d, \\ \mathsf{P}' &\equiv 2\nu - n - 2 + 2p - \varrho, \\ R' &\equiv 2n - \nu - 2 + 2p - r. \end{aligned} \tag{II}$$

Es sind dann die Beziehungen zwischen den alten und neuen Formen aufzustellen. Auf Grund von (3) und (3′) drücken sich die vier neuen Formen in den alten aus wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv -2N + 3\Pi, & D &\equiv -2\mathsf{N} + 3P, \\ \mathsf{P}' &\equiv N - \Pi, & R' &\equiv \mathsf{N} - P. \end{aligned} \tag{III}$$

Umgekehrt sollen jetzt die sechs alten Formen in den vier neuen dargestellt werden.

Zunächst ergibt sich direkt aus (III):

$$\begin{aligned} \mathsf{N} &\equiv D + 3R', & N &\equiv \Delta + 3\mathsf{P}', \\ \Pi &\equiv \Delta + 2\mathsf{P}', & P &\equiv D + 2R', \end{aligned} \tag{III$_a$}$$

Um auch noch P und R in den neuen Formen auszudrücken, ziehe man die Syzygien (1) und (2) heran, die man in der Gestalt schreibe:

$$(1) \qquad \mathsf{P} + R \equiv 3\mathsf{N} + 3N,$$

$$(2) \qquad \mathsf{P} - R \equiv \mathsf{N} - N + 2P - 2\Pi.$$

Dann liefert deren Addition resp. Subtraktion:

$$\mathsf{P} \equiv 2\mathsf{N} + N + P - \Pi, \qquad R \equiv 2N + \mathsf{N} - P + \Pi.$$

Trägt man hier rechter Hand die Werte von N, N, Π, P aus (III_a') ein, so erhält man die zwei noch fehlenden Beziehungen:

$$(\mathrm{III}_b') \qquad \mathsf{P} \equiv 3D + \mathsf{P}' + 8R', \qquad R \equiv 3\Delta + R' + 8\mathsf{P}'.$$

3. Die Einführung der vier neuen Formen Δ, D, P', R' in (II) legt es nahe, die vier Singularitätenanzahlen δ, d, ϱ, r in den drei Größen ν, n, p als unabhängigen Parametern auszudrücken.

Setzt man jene vier neuen Formen gleich Null, so hat man ohne weiteres die Darstellungen:

$$(\mathrm{IV}) \qquad \begin{aligned} \delta &= \frac{(\nu-1)(\nu-6)}{2} + n - 3p, \\ d &= \frac{(n-1)(n-6)}{2} + \nu - 3p, \\ \varrho &= 2\nu - n - 2 + 2p, \\ r &= 2n - \nu - 2 + 2p. \end{aligned}$$

Hierbei werde der triviale Fall der Kegelschnitte (wo $n = \nu = 2$, $\delta = d = \varrho = r = p = 0$) von vornherein ausgeschlossen.

Man gehe — unter Bevorzugung des Ordnungsstandpunktes — von einem willkürlich gewählten natürlichen Werte (> 2) von n aus; dann sind aber die beiden anderen Parameter ν und p nicht mehr völlig willkürlich, sondern an gewisse Grenzbedingungen gebunden. Unsere Aufgabe, die Plückerschen und Clebschschen Gleichungen aufzulösen, konzentriert sich daher jetzt darauf, jene Grenzbedingungen zu ermitteln.

4. Wir bestimmen zuerst die Grenzen und damit den Verlauf für die Klasse ν.

Der höchste Wert ν_a von ν ergibt sich sofort aus $\mathsf{N} = 0$ als $\nu_a = n(n-1)$. Geht man von da zu kleineren Werten über, so bemerkt man, daß der Fall des nächstniedrigen Wertes $n(n-1) - 1$ für ν nicht auftreten kann, während weiterhin alle kleineren Werte zulässig sind, bis zu einem kleinsten $\nu = \nu_i$, der nunmehr ermittelt werde.

Denkt man sich diesen kleinsten Wert ν_i bereits gefunden, so gehört zu ihm eine Reihe von n-Werten, deren höchster gemäß $N = 0$ $\nu_i(\nu_i - 1)$ ist, während der nächstniedrigere Wert $\nu_i(\nu_i - 1) - 1$ als n-Wert nicht zu ν_i, sondern zu $\nu_i + 1$ als kleinster Klasse gehört.

Setzt man $\nu_i = \tau + 1$, so daß $\nu_i(\nu_i - 1) = \tau(\tau + 1)$ wird, so folgt, daß der nächsthöhere Wert $\tau(\tau + 1) + 1$ als n-Wert zum kleinsten ν-Wert $\nu_i + 1 = \tau + 2$ gehört. Man teile daher das Gebiet der n-Werte (> 2) in „τ-Intervalle“ ein nach dem Schema

$$(4)\quad \tau(\tau-1)+1, \tau(\tau-1)+2, \ldots, \tau(\tau-1)+s, \ldots, \tau(\tau-1)+2\tau = \tau(\tau+1)$$
$$(\tau \geqq 2,\ 1 \leqq s \leqq 2\tau).$$

Jeder Wert von n gehört einem einzigen solchen τ-Intervall an und kommt in diesem nur einmal vor.

Dann zeigt die vollständige Induktion nach obigem, daß zu jedem n eines τ-Intervalles als Minimalwert von ν der Wert $\nu_i = \tau + 1$ gehört, so daß $n = (\nu_i - 1)(\nu_i - 2) + s$ wird, mit Ausnahme des vorletzten „singlären“ n-Wertes $\tau(\tau + 1) - 1$, zu dem der ν-Minimalwert $\nu_i = \tau + 2$ gehört, so daß $\tau(\tau + 1) - 1 = (\nu_i - 1)(\nu_i - 2) - 1$ wird.

Es ist nur noch direkt zu zeigen, daß diese Regel auch für das niedrigste τ-Intervall, wo $\tau = 2$, richtig ist.

Es besteht dann das Intervall aus den vier Zahlen 3, 4, 5, 6. Man weiß aber, daß zu dem kleinsten Wert 3 von ν die n-Werte 3, 4, 6 als einzig mögliche gehören, während für $n = 5$ die kleinste Klasse ν gleich 4, i. e. um 1 größer als 3 ist.

Somit hat man nur noch umgekehrt den zu irgendeinem vorgegebenen Werte von n gehörigen Wert von $\tau = \nu_i - 1$ zu bestimmen. Nun befindet sich im Intervalle (4) eine einzige Quadratzahl, nämlich für $s = \tau$ die Zahl τ^2. Mit anderen Worten: es ist τ^2 die an n nächstgelegene Quadratzahl, oder auch, es ist τ die an $+\sqrt{n}$ nächstgelegene natürliche Zahl. Bedient man sich des Zeichens $P(h)$ für die an einer positiven Zahl h nächstgelegene natürliche Zahl, so ist $\tau = \nu_i - 1 = P(+\sqrt{n})$.

Es gilt also der

Satz. *Bei beliebig gewähltem, aber festgehaltenem Werte* (> 2) *der Ordnung* n *einer Kurve* c *durchläuft die Klasse* ν *das Intervall* $(\nu_i, \ldots, \nu_a)$, *mit Ausnahme des Wertes* $\nu_a - 1$, *wo* $\nu_i = P(\sqrt{n}) + 1$ — *im singulären Falle* $\nu_i = P(\sqrt{n}) + 2$ — *und* $\nu_a = n(n-1)$ *ist.*

5. Wir kommen zur Bestimmung der Grenzen und des Verlaufes vom Geschlechte p bei vorgegebenen n und ν.

Man schreibe die Grundformeln (IV) um, indem man die Größen

$$(5)\qquad \delta_p = \delta + 3p, \quad d_p = d + 3p, \quad \varrho_p = \varrho - 2p, \quad r_p = r - 2p$$

als selbständige einführt:

$$(\mathrm{IV}')\qquad \delta_p = \frac{(\nu-1)(\nu-6)}{2} + n, \qquad d_p = \frac{(n-1)(n-6)}{2} + \nu,$$
$$\varrho_p = 2\nu - n - 2, \qquad r_p = 2n - \nu - 2.$$

Bei festgehaltenem n hängen die linken Seiten nur noch von ν ab, sind also in diesem Sinne mit $\delta_p(\nu)$ usf. zu bezeichnen.

Es wachse jetzt ν gemäß **4.** von $\nu_i = P(\sqrt{n}) + 1$ resp. $P(\sqrt{n}) + 2$ bis $\nu_a = n(n-1)$, bei Ausschaltung von $\nu_a - 1$. Man liest dann aus (IV′) sofort die Teilregeln ab: Sooft ν um 1 wächst, wächst auch ϱ_p um 2, d_p um 1, während r_p um 1 abnimmt. Da ferner

$$\delta_p(\nu+1) - \delta_p(\nu) = \frac{\nu(\nu-5) - (\nu-1)(\nu-6)}{2} = \nu - 3,$$

so wächst δ_p um $\nu - 3$.

6. Man berechne vorab die Anfangswerte $\delta_p(\nu_i)$, $d_p(\nu_i)$, $\varrho_p(\nu_i)$, $r_p(\nu_i)$, wobei zu berücksichtigen ist, daß nach **4.**:

$$n = \tau(\tau-1) + s = (\nu_i - 1)(\nu_i - 2) + s \quad (1 \leqq s \leqq 2(\nu_i - 1) \text{ exkl. } s = 2\nu_i - 3),$$

während der singuläre Fall dem Werte $s = -1$ entspricht. Zunächst wird:

$$(6_\delta) \qquad \delta_p(\nu_i) = \frac{(\nu_i-1)(\nu_i-6)}{2} + n = \frac{(\nu_i-1)(\nu_i-6) + 2(\nu_i-1)(\nu_i-2)}{2} + s$$
$$= \frac{3\nu_i^2 - 13\nu_i + 10}{2} + s.$$

Hieraus ergeben sich folgende Teilschlüsse.

Für $\nu_i \geqq 6$ ist offenbar $\delta_p(\nu_i) > 0$, desgleichen für $\nu_i = 5, 4$. Endlich für $\nu_i = 3$, also $n = 3, 4, 6$, nimmt $\delta_p(\nu_i)$ die Werte $0, 1, 3$ an. Somit ist stets $\delta_p(\nu_i) \geqq 0$, wobei der Grenzfall $\delta_p(\nu_i) = 0$ nur für $\nu_i = 3$, $n = 3$ eintritt. Weiter erhält man

$$(6_d) \qquad d_p(\nu_i) = \frac{(n-1)(n-6)}{2} + \nu_i.$$

Für $n \geqq 6$ fällt $d_p(\nu_i)$ stets positiv aus. Dies gilt auch für $n = 4, 3$, wo nur für den kleinsten Wert $\nu_i = 3$ $d_p(\nu_i) = 0$. Mithin ist auch stets $d_p(\nu_i) \geqq 0$, wobei der Grenzfall $d_p(\nu_i) = 0$ nur für $\nu_i = 3$, $n = 3, 4$ eintritt.

Sodann ergibt sich

$$(6_\varrho) \qquad \varrho_p(\nu_i) = -(n - 2\nu_i + 2)$$
$$= -\{(\nu_i - 1)(\nu_i - 2) - 2\nu_i + s + 2\}$$
$$= -\{\nu_i(\nu_i - 5) + s + 4\}.$$

Hieraus entnimmt man, daß $\varrho_p(\nu_i)$ einen positiven Wert, nämlich 1, nur in den beiden Ausnahmefällen $\nu_i = 4$, $n = 5$ und $\nu_i = 3$, $n = 3$ annimmt, und daß $\varrho_p(\nu_i) = 0$ ist nur im Falle $\nu_i = 3$, $n = 4$, während in allen übrigen Fällen $\varrho_p(\nu_i)$ *negativ* ausfällt.

Endlich kommt

$$(6_r) \qquad r_p(\nu_i) = 2n - \nu_i - 2 = 2(\nu_i - 1)(\nu_i - 2) - \nu_i - 2 + 2s$$
$$= \nu_i(2\nu_i - 7) + 2(s+1).$$

Ersichtlich ist stets $r_p(\nu_i) > 0$.

7. Da $\delta_p(\nu)$ und $d_p(\nu)$ nie negativ werden, dagegen $\varrho_p(\nu)$ und $r_p(\nu)$ positiv wie negativ werden können, so teile man behufs Untersuchung der p-Bereiche bei festgehaltenem n den ν-Bereich $(\nu_i, \ldots, \nu_a - 2, \nu_a)$ mit Rücksicht auf die Vorzeichen von ϱ_p und r_p sowie von $\varrho_p - r_p$ in vier Teilintervalle ein, die mit (I), (II), (III), (IV) bezeichnet seien. Man hat die

Tabelle (V).

(I) $\varrho_p \leqq 0$, $r_p > 0$, $(\varrho_p < r_p)$, $\delta_p < d_p$, bis zum Falle $\varrho_p = 0$ resp. $\varrho_p = -1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist;

(II) $\varrho_p > 0$, $r_p > 0$, $\varrho_p < r_p$, $\delta_p \leqq d_p$, bis zum „autodualen" Falle $\varrho_p = r_p$, i. e. $\varrho = r$, $\delta = d$, $\nu = n$;

(III) $\varrho_p > 0$, $r_p \geqq 0$, $\varrho_p > r_p$, $d_p < \delta_p$, bis zum Falle $r_p = 0$;

(IV) $\varrho_p > 0$, $r_p < 0$ $(\varrho_p > r_p)$, $d_p \leqq \delta_p$.

Für diese vier Intervalle sind die jeweiligen ν-Grenzen anzugeben. Man trenne die beiden Hauptfälle (A) eines geraden und (B) eines ungeraden n.

(A) n gerade.

(I) von $\nu = \nu_i$ bis $\nu = \frac{n}{2} + 1$;

(II) von $\nu = \frac{n}{2} + 2$ bis $\nu = n$;

(III) von $\nu = n + 1$ bis $\nu = 2(n-1)$;

(IV) von $\nu = 2n - 1$ bis $\nu = \nu_a = n(n-1)$, mit Ausschluß von $\nu = \nu_a - 1$.

(B) n ungerade.

(I) von $\nu = \nu_i$ bis $\nu = \frac{n+1}{2}$;

(II) von $\nu = \frac{n+3}{2}$ bis $\nu = n$;

(III) und (IV) wie bei (A).

Man beachte indessen, daß sich — unter $E(h)$ $(h \geqq 0)$ die größte in h enthaltene natürliche Zahl inkl. 0 verstanden — beide Hauptfälle in einen einzigen zusammenziehen lassen.

In der Tat ist der Endwert von ν in (I) beidemal durch $E\left(\frac{n+2}{2}\right)$ und entsprechend der Anfangswert von ν in (II) beidemal durch $E\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 = E\left(\frac{n+4}{2}\right)$ angebbar.

Den Tabellen (A) und (B) entnimmt man ohne weiteres die Anzahlen a der Individuen der einzelnen Intervalle.

(A_1) n gerade, $=(\nu_i-1)(\nu_i-2)+s$,
wo auch s gerade, $=2s_1$ $(s_1=1, 2, \ldots, \nu_i-1)$.

(I) $a=\left(\frac{n}{2}+1-\nu_i\right)+1=\frac{(\nu_i-2)(\nu_i-3)}{2}+s_1$ (>0),

(II) $a=n-\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}-1=E\left(\frac{n-1}{2}\right)$,

(III) $a=2(n-1)-n=n-2$,

(IV) $a=n(n-1)-2(n-1)=(n-1)(n-2)$.

(B_1) n ungerade, $=(\nu_i-1)(\nu_i-2)+s$,
wo auch s ungerade, $=2s_1+1$ $(s_1=-1, 0, 1, 2, \ldots, \nu_i-3)$
(der Wert $s_1=-1$ entspricht dem singulären Falle).

(I) $a=\left(\frac{n+1}{2}-\nu_i\right)+1=\frac{(\nu_i-2)(\nu_i-3)}{2}+s_1$.

In den beiden Ausnahmefällen $n=3$, $\nu_i=3$ und $n=5$, $\nu_i=4$ wird $a=0$, so daß (I) in Wegfall kommt (s. auch **12.**). Sonst ist $a>0$.

(II) $a=n-\frac{n+1}{2}=\frac{n-1}{2}=E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

(III) und (IV) wie bei (A_1).

Man beachte noch, daß bei (I) s_1 beidemal in der Form $E\left(\frac{s}{2}\right)$ darstellbar ist. Dies gilt auch noch für den singulären Fall $s=-1$, $s_1=-1$, wenn man festsetzt, daß $E(h)$ auch bei negativem h die an h nächstgelegene ganze Zahl $(\leqq h)$ bedeutet.

8. Wir kehren zurück zur Tabelle (V), um die daselbst gemachten Angaben über ϱ_p und r_p, δ_p und d_p zu bestätigen. Aus (IV′) leitet man ohne weiteres die beiden wichtigen Beziehungen ab:

(7) $$\varrho_p-r_p=\varrho-r=3(\nu-n),$$

(8) $$\delta_p-d_p=\delta-d=\frac{(\nu-n)(\nu+n-9)}{2}.$$

Gemäß (7) ist ϱ_p-r_p gleichnamig mit $\nu-n$. Da aber $\nu-n$ im Intervalle (I) <0, in (II) $\leqq 0$, dagegen in (III) und (IV) >0 ist, so sind damit die Angaben über ϱ_p und r_p in (V) bewiesen.

Ferner ist gemäß (8) im „allgemeinen“ oder „regulären“ Falle, wo $\nu+n>9$, auf den wir uns zunächst beschränken, δ_p-d_p ebenfalls mit $\nu-n$ gleichnamig. Hieraus folgen sofort die Angaben über δ_p und d_p in (V).

Die Sonderfälle $\nu+n\leqq 9$, wo δ_p-d_p mit $\nu-n$ ungleichnamig ist, sollen weiter unten (**11.** bis **13.**) diskutiert werden.

9. Nunmehr kommen wir zu den Grenzen und dem Verlauf des Geschlechtes p in den vier Intervallen der Tabelle (V) auf Grund der Vergleichung mit (IV′). Einmal ergibt sich hinsichtlich der oberen Grenze p_a von p sofort, daß in den Intervallen (I) und (II) $p \leqq E\left(\frac{\delta_p}{3}\right)$, dagegen in den Intervallen (III) und (IV) $p \leqq E\left(\frac{d_p}{3}\right)$.

Andererseits fasse man die untere Grenze p_i von p ins Auge.

Da im Intervalle (I) $\varrho_p \leqq 0$, während $r_p > 0$, so setze man $-\varrho_p = \varrho_p'$, dann ist die nichtnegative Zahl ϱ_p' zugleich mit n gerade resp. ungerade.

Bei geradem n besitzt ϱ_p' zu Beginn von (I) den größten Wert $\varrho_p'(\nu_i)$, sinkt dann bei zunehmendem ν je um 2, bis es am Ende von (I) den kleinsten Wert 0 annimmt.

Somit ist in (I) bei geradem n $p \geqq \frac{\varrho_p'}{2}$. Bei ungeradem n ist auch ϱ_p' ungerade, verhält sich im übrigen wie eben, nur daß es am Ende von (I) den kleinsten Wert 1 annimmt.

Somit ist in (I) bei ungeradem n $p \geqq \frac{\varrho_p'+1}{2}$. Beide Fälle lassen sich zusammenfassen in $p \geqq E\left(\frac{\varrho_p'+1}{2}\right)$.

In den Intervallen (II) und (III) ist $\varrho_p > 0$, $r_p \geqq 0$, mithin $p \geqq 0$.

Im Intervalle (IV) ist $\varrho_p > 0$, dagegen $r_p < 0$. Man setze $-r_p = r_p'$.

Zu Beginn von (IV) hat r_p' den kleinsten Wert 1 und nimmt dann je um 1 zu. Sooft r_p' gerade, ist daher $p \geqq \frac{r_p'}{2}$, und sooft r_p' ungerade, $p \geqq \frac{r_p'+1}{2}$. Wiederum faßt man beide Fälle zusammen in $p \geqq E\left(\frac{r_p'+1}{2}\right)$.

Auf Grund dieser Ergebnisse entsteht für den allgemeinen Fall $(\nu + n > 9)$ die Intervall-Tabelle (VI) für p.

Tabelle (VI).

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & E\left(\frac{\varrho_p'+1}{2}\right) \leqq p \leqq E\left(\frac{\delta_p}{3}\right), \\ \text{(II)} & 0 \leqq p \leqq E\left(\frac{\delta_p}{3}\right), \\ \text{(III)} & 0 \leqq p \leqq E\left(\frac{d_p}{3}\right), \\ \text{(IV)} & E\left(\frac{r_p'+1}{2}\right) \leqq p \leqq E\left(\frac{d_p}{3}\right). \end{array}$$

10. Der Tabelle (VI) liegt die stillschweigende Voraussetzung zugrunde, daß jeweils bei gegeben gedachten n, ν mindestens ein nichtnegativer Wert von p existiert, daß also die untere Grenze p_i niemals die obere p_a überschreitet. Letzteres ist daher noch zu bestätigen.

Wir betrachten zuerst das Intervall (I) und beginnen mit dem obersten Fall $\nu = \nu_i$.

Ist n gerade, also auch s $(= 2, 4, \ldots, 2\nu_i - 2)$, so bilde man die Differenz:

$$D_p = \frac{\delta_p}{3} - \frac{\varrho'_p}{2}. \tag{9}$$

Auf Grund von (6_δ) und (6_ϱ) ergibt sich:

$$D_p = \frac{1}{6}(2\nu_i - s - 2). \tag{9'}$$

Hier erhält D_p seinen kleinsten Wert für den größten von s, i. e. $s = 2\nu_i - 2$.

Es ist also in diesem Falle $D_p = 0$, sonst $D_p > 0$.

Somit ist in der Tat $p_i(\nu_i) \leqq p_a(\nu_i)$.

Ist dagegen n ungerade, also auch $s = 1, 3, \ldots, 2\nu_i - 5$, und $s = -1$ im singulären Falle, so ist die Differenz zu bilden:

$$D_p = \frac{\delta_p}{3} - \frac{\varrho'_p + 1}{2}. \tag{10}$$

Es ergibt sich wiederum gemäß (6_ϱ) und (6_δ):

$$D_p = \frac{1}{6}(2\nu_i - s - 5). \tag{10'}$$

Hier erhält D_p seinen kleinsten Wert für den größten von s, i. e. $s = 2\nu_i - 5$.

In diesem Falle ist also $D_p = 0$, sonst $D_p > 0$.

Im singulären Falle $(s = -1)$ wird $D_p = \frac{1}{3}(\nu_i - 3)$, mithin, da dann $\nu_i \geqq 4$, $D_p > 0$. Es ist daher wiederum $p_i(\nu_i) \leqq p_a(\nu_i)$.

Läßt man nunmehr ν in (I) wachsen, so nimmt ϱ'_p je um 2 ab, während δ_p je um $\nu - 3$ zunimmt. Somit ist in (I) a fortiori $p_i(\nu) \leqq p_a(\nu)$.

Weiter ist in den Intervallen (II) und (III) $\varrho_p > 0$, $r_p \geqq 0$. Folglich ist stets $p_i(\nu) = 0$, und eo ipso $p_i(\nu) \leqq p_a(\nu)$.

Es bleibt noch das Intervall (IV).

Man beginne jetzt mit dem untersten Fall $\nu = \nu_a = n(n-1)$, wo $n(n-1)$ zur Abkürzung mit $2p_0$ bezeichnet sei.

Auf Grund von (6_r) und (6_d) ergibt sich: $\frac{r'_p}{2} = p_0$, $\frac{d_p}{3} = p_0$, so daß kommt:

$$p_i(\nu_a) = p_a(\nu_a) = p_0 = p. \tag{11_0}$$

Von hier aus gehe man in (IV) aufwärts. Man trenne die beiden Hauptfälle, je nachdem man von $\nu = \nu_a$ aus um eine gerade Anzahl $2l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ von Schritten nach oben geht, oder aber um eine ungerade Anzahl $2l + 1$ $(l = 1, 2, \ldots)$ von Schritten.

Im ersteren Hauptfall, wo $\nu = \nu_a - 2l$, ergibt sich $r'_p = 2p_0 - 2l$, also $\frac{r'_p}{2} = p_0 - l$. Andererseits wird $d_p = 3p_0 - 2l$, also $\frac{d_p}{3} = p_0 - \frac{2l}{3}$.

Damit kommt für die Differenz D_p:

$$D_p = \frac{d_p}{3} - \frac{r'_p}{2} = \frac{l}{3} \geqq 0. \tag{11}$$

Im zweiten Hauptfall, wo $\nu = \nu_a - (2l+1)$, wird $r'_p = 2p_0 - (2l+1)$, $d_p = 3p_0 - (2l+1)$, und damit die Differenz D_p:

$$D_p = \frac{d_p}{3} - \frac{r'_p+1}{2} = l - \frac{2l+1}{3} = \frac{l-1}{3} \geqq 0. \tag{12}$$

Daher ist in der Tat im ganzen Intervalle (IV)

$$p_i(\nu) \leqq p_a(\nu).$$

Zugleich bestätigt sich die Tatsache, daß der Fall $\nu = \nu_a - 1$ überhaupt nicht auftreten kann. Denn dann würde $p_i(\nu) = p_a(\nu) + 1$, also $p_i(\nu) > p_a(\nu)$ ausfallen. Faßt man zusammen, so hat man die Regel: „Welchem der vier Intervalle ν auch angehören möge, stets ist p der $p_a(\nu) - p_i(\nu) + 1 > 0$ Werte fähig: $p_i(\nu)$, $p_i(\nu)+1, \ldots, p_a(\nu)$, wo die beiden Grenzen $p_i(\nu)$ und $p_a(\nu)$ von p der Tabelle (VI) zu entnehmen sind."

11. Nunmehr sind noch die Sonderfälle, wo $\nu + n \leqq 9$, zu erledigen. Wir stellen zunächst, auf Grund von (6), die Werte der $\varrho_p, r_p, \delta_p, d_p$ in einer Tabelle (VII) zusammen.

Tabelle (VII).

(a) $\nu + n = 9.$

(a_1) $n = 6,\ \nu = 3;$ (a'_1) $n = 3,\ \nu = 6;$ $(p = 1,\ \delta = d = 0).$

(a_1) $\varrho_p = -2,\ r_p = 7;\ \delta_p = d_p = 3,$
(a'_1) $\varrho_p = 7,\ r_p = -2,\ \delta_p = d_p = 3.$

(a_2) $n = 5,\ \nu = 4,$ (a'_2) $n = 4,\ \nu = 5;$ $(p = 0,\ \delta = d = 2).$

(a_2) $\varrho_p = 1,\ r_p = 4;\ \delta_p = d_p = 2,$
(a'_2) $\varrho_p = 4,\ r_p = 1;\ \delta_p = d_p = 2.$

(b) $\nu + n = 8.$

$\nu = n = 4\ (p = 0,\ \delta = d = 1),$

(b) $\varrho_p = r_p = 2,\ \delta_p = d_p = 1.$

(c) $\nu + n = 7.$

(c_1) $n = 4,\ \nu = 3;$ (c'_1) $n = 3,\ \nu = 4;$ $(p = 0).$

(c_1) $\varrho_p = 0,\ r_p = 3;\ \delta_p = 1,\ d_p = 0,$
(c'_1) $\varrho_p = 3,\ r_p = 0;\ \delta_p = 0,\ d_p = 1.$

(d) $\nu + n = 6.$

$n = \nu = 3$ $(p = 0,\ \varrho = r = 1,\ \delta = d = 0)$,

(d) $\varrho_p = r_p = 1;\ \delta_p = d_p = 0.$

12. Auf Grund der Tabelle (VII) sind die Modifikationen festzustellen, die die p-Tabelle (VI) in den Sonderfällen erfährt; letztere werden dabei den Hauptfällen $n = 3, 4, 5, 6$ eingeordnet.

(VI_α) $n = 3;\ \nu_i = 3,\ \nu_a = 6.$

(I) fällt weg, da $\delta_p = d_p$ und $\nu_i > \frac{n+1}{2}$ (s. auch **7.**);

(II) $\nu = 3;\ \delta_p = d_p = 0,\ \varrho_p = r_p = 1$: verhält sich regulär;

(III) $\nu = 4;\ \varrho_p = 3,\ r_p = 0,\ \delta_p = 0,\ d_p = 1$: Ausnahmefall, da $\delta_p = d_p$;

(IV) $\nu = 6;\ \varrho_p = 7,\ r_p = -2,\ \delta_p = d_p = 3$: verhält sich regulär.

(VI_β) $n = 4,\ \nu_i = 3,\ \nu_a = 12.$

(I) $\nu = 3;\ \varrho_p = 0,\ r_p = 3,\ \delta_p = 1,\ d_p = 0$: Ausnahmefall, da $\delta_p > d_p$;

(II) $\nu = 4;\ \varrho_p = r_p = 2,\ \delta_p = d_p = 1$: verhält sich regulär;

(III) $\nu = 5, 6.$

$\nu = 5;\ \varrho_p = 4,\ r_p = 1,\ \delta_p = d_p = 2$: Ausnahmefall, da $\delta_p = d_p$;

$\nu = 6$: verhält sich regulär;

(IV) $\nu = 7, \ldots, 10, 12$: verhält sich regulär.

(VI_γ) $n = 5;\ \nu_i = 4,\ \nu_a = 20.$

(I) fällt weg, da $\nu_i > \frac{n+1}{2}$ (s. auch **7.**);

(II) $\nu = 4, 5.$

$\nu = 4;\ \varrho_p = 1,\ r_p = 4,\ \delta_p = d_p = 2$: verhält sich regulär;

$\nu = 5;\ \varrho_p = \nu_p = 3,\ \delta_p = d_p = 3$: verhält sich regulär;

(III) und (IV) verhalten sich regulär.

(VI_δ) $n = 6;\ \nu_i = 3,\ \nu_a = 30.$

(I) $\nu = 3, 4;$

$\nu = 3;\ \varrho_p = -2,\ r_p = 7,\ \delta_p = d_p = 3$: Ausnahmefall, da $\delta_p = d_p$;

$\nu = 4;\ \varrho_p = 0,\ r_p = 6,\ \delta_p = 3,\ d_p = 4$: verhält sich regulär;

(II), (III) und (IV) verhalten sich regulär.

13. Indessen zeigt man leicht, daß auch in den obigen Ausnahmefällen die Hauptregeln der allgemeinen p-Tabelle (VI) gültig bleiben.

(VI_α) $n = 3.$

(II) $\nu = 3;\ \varrho_p = 1,\ \delta_p = 0$: $p_i = p_a = p = 0;$

(III) $\nu = 4;\ r_p = 0,\ d_p = 1$: $p_i = p_a = p = 0.$

(VI_β) $n = 4.$

(II) $\nu = 3;\ \varrho_p = 0,\ \delta_p = 1:\ p_i = p_a = p = 0;$

(III) $\nu = 5;\ r_p = 1,\ d_p = 2:\ p_i = p_a = p = 0.$

(VI_γ) $n = 5.$

(II) $\nu = 4;\ \varrho_p = 1,\ \delta_p = 2:\ p_i = p_a = p = 0.$

(VI_δ) $n = 6.$

(I) $\nu = 3;\ \varrho_p = -2,\ \delta_p = d_p = 3:\ p_i = p_a = p = 1.$

14. Endlich sei darauf hingewiesen, daß sich die Tabelle (VI) für die Werte von p in den vier Intervallen (I), (II), (III), (IV) auf Grund der Ausdrücke (IV′) für die Größen $\varrho_p, r_p, \delta_p, d_p$ auf die Werte der vier Singularitätenzahlen ϱ, ν, δ, d überträgt.

Für irgend einen Wert von ν innerhalb eines der vier Intervalle ist $\varrho = \varrho_p + 2p$. Hier nimmt ϱ seinen kleinsten Wert ϱ_i für $p = p_i$ an, so daß $\varrho_i = \varrho_p + 2p_i$ wird.

Läßt man daher p seine Reihe $p_i, p_i + 1, \ldots, p_a = p_i + (p_a - p_i)$ durchlaufen, so durchläuft ϱ die Reihe:

(13_ϱ) $\varrho_i = \varrho_p + 2p_i,\ \varrho_i + 2\cdot 1,\ \varrho_i + 2\cdot 2, \ldots, \varrho_i + 2(p_a - p_i).$

Analog ergibt sich für $r = r_p + 2p$ die Reihe:

(13_r) $r_i = r_p + 2p_i,\ r_i + 2\cdot 1,\ r_i + 2\cdot 2, \ldots, r_i + 2(p_a - p_i).$

Andererseits ist $\delta = \delta_p - 3p$. Hier erhält δ seinen kleinsten Wert δ_i für $p = p_a$, so daß $\delta_i = \delta_p - 3p_a$ wird.

Durchläuft wiederum p seine Reihe, nur in umgekehrter Richtung, von p_a bis p_i, so durchläuft δ die Reihe:

(13_δ) $\delta_i = \delta_p - 3p_a,\ \delta_i + 3\cdot 1,\ \delta_i + 3\cdot 2, \ldots, \delta_i + 3(p_a - p_i)$

und analog $d = d_p - 3p$ die Reihe:

(13_d) $d_i = d_p - 3p_a,\ d_i + 3\cdot 1,\ d_i + 3\cdot 2, \ldots, d_i + 3(p_a - p_i).$

15. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die oben angegebenen Darstellungen von p, δ, d, ϱ, r rein arithmetischer Natur sind. Wie weit sie an Kurven geometrisch realisierbar sind, ist eine ganz andere Frage.

Im allgemeinen wird sich die Existenz zugehöriger Kurven entweder direkt durch geometrische Konstruktionen oder aber mittels der Theorien der Abelschen und automorphen Funktionen zeigen lassen. Indessen bleiben gewisse Reihen von Grenzfällen übrig, die noch einer näheren Untersuchung bedürfen.

Königsberg i. Pr., November 1931.

(Eingegangen am 5. November 1931.)

Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné.

Par

Henri Cartan à Strasbourg.

Dans un article récent[1]), je m'étais occupé des «transformations intérieures» d'un domaine borné D, c'est-à-dire des transformations (analytiques par rapport aux variables complexes) d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D. Je m'étais d'ailleurs limité au cas de *deux* variables complexes. M. Carathéodory, dans un mémoire[2]) dont il a eu l'amabilité de me communiquer les épreuves, a repris l'étude de cette question en la simplifiant et en la complétant. Le mémoire de M. Carathéodory, qui est en somme un exposé systématique de la théorie de la convergence des suites de transformations analytiques, contient certains résultats qui m'ont amené à quelques réflexions faisant l'objet essentiel du présent travail (Satz 14 de M. Carathéodory, § 5 de ce travail).

L'étude de M. Carathéodory, valable pour n variables complexes, ne s'applique malheureusement qu'aux domaines univalents. J'ai cherché précisément à obtenir ici des énoncés valables aussi bien dans le cas des domaines multivalents que dans celui des domaines univalents. Aussi ai-je été conduit à placer d'abord (§§ 1—4) quelques considérations générales sur les domaines et les transformations analytiques. Sans chercher à développer complètement une théorie analogue à celle de M. Carathéodory pour les domaines univalents, je démontre quelques propositions qui sont vraies

[1]) Henri Cartan, Sur les fonctions de deux variables complexes. Les transformations d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D (Bull. Soc. Math. de France **58** (1930), p. 199—219). Ce travail sera désigné ici par [a].

[2]) C. Carathéodory, Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden, Math. Zeitschr. **34** (1932), p. 758—792. Ce travail sera désigné ici par [b].

aussi bien dans le cas multivalent que dans le cas univalent; signalons notamment le théorème 2 (§ 4), qui correspond au théorème 10 de M. Carathéodory, bien que la démonstration en soit toute différente.

Mais les paragraphes 1, 2, 3, 4 ne doivent être considérés que comme des préliminaires indispensables à l'exacte compréhension du paragraphe 5, qui constitue la partie essentielle de ce travail.

Tout ce qui suit s'applique aussi bien au cas d'une variable complexe qu'au cas de n variables complexes.

§ 1.

Généralités sur les transformations analytiques.

Plaçons-nous dans l'espace de n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, et considérons un système de n fonctions de ces variables, holomorphes dans une hypersphère Σ ayant pour centre un point O de cet espace. A chaque point M de Σ ces fonctions font correspondre un point que nous désignerons par $S(M)$; nous dirons aussi que ces n fonctions définissent, dans Σ, une *transformation analytique* S.

Si le jacobien de la transformation S est identiquement nul dans Σ, les n fonctions définissant S ne sont pas indépendantes; nous dirons alors que la transformation S est *dégénérée*. Si S est dégénérée, l'ensemble des transformés des points de Σ a moins de n dimensions complexes.

Envisageons maintenant une transformation S *non dégénérée*. Ou bien le jacobien de S n'est pas nul au point O, ou bien il est nul en O sans être identiquement nul. Dans le premier cas (jacobien non nul en O), on sait qu'il existe une hypersphère Σ' de centre O, intérieure à Σ, et un domaine univalent Σ_1' contenant à son intérieur le point $O_1 = S(O)$, tels que la transformation S établisse une correspondance biunivoque entre les points intérieurs de Σ' et ceux de Σ_1'.

Le cas où le jacobien de S s'annule en O sans être identiquement nul est plus compliqué. Le problème de l'inversion de la transformation S, dans ce cas, a été résolu par Osgood qui a montré ceci[3]: *ou bien* il existe, dans toute hypersphère de centre O si petite soit-elle, au moins un point, autre que O, dont le transformé par S coïncide avec $S(O)$; nous dirons alors que le point O est un point *exceptionnel* pour la transformation S, ou encore que la transformation S est exceptionnelle au point O; — *ou bien* l'hypothèse précédente est exclue, et l'on démontre alors l'existence d'une hypersphère Σ' de centre O, d'une hypersphère Σ_1' de centre $O_1 = S(O)$, et d'un entier $k \geqq 2$, tels que l'équation $S(M) = M_1$,

[3]) Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (2. Aufl.), p. 139 (Satz 2).

où M_1 désigne un point arbitraire de Σ_1', ait exactement k solutions M intérieures à Σ'; ces k solutions sont distinctes si M_1 ne se trouve sur aucune des variétés d'un certain ensemble E_1 de variétés analytiques à $n-1$ dimensions complexes[4]), en nombre fini, passant par O_1; au contraire, si M_1 vient en un point d'une variété de l'ensemble E_1, les k solutions M se confondent totalement ou en partie. L'ensemble E_1 n'est d'ailleurs autre que l'ensemble des transformés par S des points où s'annule le jacobien de S.

Il résulte de là que, lorsque O n'est pas un point exceptionnel pour la transformation S envisagée, S transforme un voisinage suffisamment petit du point O en un domaine à k «feuillets»; ces feuillets se raccordent suivant une ou plusieurs variétés de ramification, qui sont des variétés analytiques à $n-1$ dimensions complexes passant par le point $O_1 = S(O)$. Nous dirons dans ce cas (et aussi dans le cas $k=1$ qui est celui où le jacobien de S ne s'annule pas au point O) que la transformation S est *topologique* au point O.

En résumé, une transformation analytique quelconque, supposée définie dans une hypersphère Σ de centre O, est ou bien dégénérée, ou bien exceptionnelle au point O, ou bien topologique au point O.

Disons encore quelques mots sur les points exceptionnels d'une transformation analytique non dégénérée. D'après un théorème connu[5]), si O est un point exceptionnel pour la transformation S, l'ensemble des points M, voisins de O, dont l'image $S(M)$ coïncide avec $S(O)$, constitue une ou plusieurs variétés analytiques (en nombre fini) passant par O; ces variétés, qui n'ont pas toutes forcément le même nombre de dimensions (complexes), sont transformées par S en un point unique, le point $S(O)$, et tous les points de ces variétés sont des points exceptionnels pour la transformation S. Mais il se peut qu'il existe encore d'autres points exceptionnels dans un voisinage arbitraire du point O.[6]) Il ne semble pas que l'on ait étudié systématiquement la distribution de l'ensemble de *tous* les points exceptionnels voisins d'un point donné O. Je suis arrivé au résultat suivant, dont je ne donnerai pas ici la démonstration: étant donnée une

---

[4]) Relativement à la notion de variété analytique à p dimensions complexes, voir Osgood, loc. cit., p. 131–133.

[5]) Osgood, loc. cit., p. 132.

[6]) Par exemple, étant donnée la transformation ($n=3$)

$$z_1' = z_2 z_3, \quad z_2' = z_3 z_1, \quad z_3' = z_1 z_2,$$

les points z_1, z_2, z_3 ayant pour transformé le point $z_1' = z_2' = z_3' = 0$ remplissent trois variétés à une dimension complexe, savoir $z_2 = z_3 = 0$, $z_3 = z_1 = 0$ et $z_1 = z_2 = 0$; quant aux points exceptionnels, ils remplissent trois variétés à deux dimensions complexes, savoir $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ et $z_3 = 0$.

transformation analytique non dégénérée dans une hypersphère Σ de centre O, ou bien il existe une hypersphère Σ' de centre O à l'intérieur de laquelle ne se trouve aucun point exceptionnel; — ou bien O est un point exceptionnel, et il existe alors une hypersphère Σ'' de centre O, intérieure à Σ, telle que l'ensemble des points exceptionnels intérieurs à Σ'' constitue une ou plusieurs variétés analytiques (en nombre fini) passant par O; chacune de ces variétés est définie par une ou plusieurs relations analytiques entre les variables complexes $z_1, \ldots, z_n$; ces variétés n'ont pas toutes forcément le même nombre de dimensions.

§ 2.

Domaines et transformations analytiques.

Nous considérerons seulement des domaines ouverts, constitués uniquement de points à distance finie. Les domaines que nous envisagerons pourront n'être pas univalents; ils pourront même contenir à leur intérieur des variétés de ramification analytiques à $n-1$ dimensions complexes, *à condition que le voisinage d'un point de ramification quelconque puisse être considéré comme transformé d'un voisinage univalent d'un certain point O par une transformation topologique en O.*

Un domaine Δ est dit *intérieur* à un domaine D s'il existe une correspondance continue qui associe à chaque point M de Δ un point M' de D et un seul ayant les mêmes coordonnées que M. On dit aussi que le domaine D *contient* le domaine Δ. Un domaine Δ est dit *sous-domaine* d'un domaine D si Δ est intérieur à D, et si en outre la correspondance précédente fait toujours correspondre deux points *distincts* de D à deux points distincts de Δ, ce que nous exprimerons en disant que Δ est *univalent par rapport à* D (par exemple, un domaine univalent, au sens ordinaire du mot, est un sous-domaine de l'espace, et réciproquement). Un sous-domaine Δ d'un domaine D est dit *complètement intérieur* à D si, étant donné un ensemble infini quelconque de points de Δ, les points correspondants de D ont au moins un point d'accumulation intérieur à D.

Un système de n fonctions holomorphes (uniformes) dans un domaine D définit une transformation S du domaine D. Si S est dégénérée au voisinage d'un point particulier de D, S est dégénérée au voisinage de tous les points de D; nous dirons simplement que S est *dégénérée*.

Si S n'est pas dégénérée, on peut se proposer d'étudier S au voisinage de chaque point de D. Au voisinage d'un point intérieur O qui n'est pas un point de ramification pour le domaine D, tout ce qui a été dit plus haut est applicable. Si le point O est un point de ramification, on se ramène au premier cas en considérant le voisinage de O comme transformé

d'un voisinage univalent par une transformation topologique, ce qui permet d'étudier S comme plus haut.

En résumé, étant donnée, dans un domaine D, une transformation analytique S non dégénérée, les points de D qui sont exceptionnels vis-à-vis de S se répartissent sur des variétés analytiques, dont le nombre de dimensions complexes est d'ailleurs quelconque; ces variétés seront dites *exceptionnelles* vis-à-vis de la transformation S. Si le domaine D ne contient aucune variété exceptionnelle, la transformation S sera dite *topologique dans* D; dans le cas contraire, S sera dite *exceptionnelle dans* D.

D'après ce qui précède, si une transformation analytique S est topologique dans un domaine D, elle transforme biunivoquement l'intérieur de D en l'intérieur d'un certain domaine D_1; nous écrirons

$$D_1 = S(D), \qquad D = S^{-1}(D_1);$$

ou remarquera que la transformation inverse S^{-1} est topologique dans D_1.

Au contraire, soit S une transformation analytique exceptionnelle dans un domaine D, et soit D^S le domaine obtenu en retranchant de D les variétés exceptionnelles vis-à-vis de S. La transformation S est topologique dans D^S et transforme D^S en un domaine D_1:

$$D_1 = S(D^S). \tag{1}$$

La transformation S^{-1} transforme topologiquement D_1 en D^S; elle est *indéterminée* aux points transformés par S des points exceptionnels de D; ces points d'indétermination sont des *points frontières* de D_1.

Par extension, nous emploierons la notation (1) même dans le cas où S est topologique dans D, étant entendu que D^S est identique à D dans ce cas.

§ 3.

Limite d'une suite uniformément convergente de transformations.

Soit donné un domaine D; considérons une suite infinie de systèmes de n fonctions holomorphes dans le domaine D,

$$f_i^1(z_1, \ldots, z_n),\ f_i^2(z_1, \ldots, z_n),\ \ldots,\ f_i^n(z_1, \ldots, z_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, k, \ldots),$$

et supposons que, pour chaque valeur de j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ les f_i^j convergent uniformément[7]) vers une fonction holomorphe f_0^j quand i augmente indéfiniment. Soit S_i la transformation définie par les fonctions $f_i^1, \ldots, f_i^n$, et soit S_0 la transformation définie par $f_0^1, \ldots, f_0^n$. Nous dirons que *la*

[7]) Nous convenons de dire que la convergence est uniforme dans le domaine D si elle est uniforme dans tout sous-domaine complètement intérieur à D.

suite des transformations S_i $(i = 1, 2, \ldots, k, \ldots)$ *converge uniformément vers la transformation* S_0.

Une famille infinie F de transformations analytiques d'un domaine D sera dite *normale* dans ce domaine, si de toute suite infinie de transformations de F on peut extraire une suite infinie qui converge uniformément dans le domaine D. Il en est ainsi, par exemple, lorsque les ensembles des points transformés des points de D par une transformation quelconque de F sont uniformément bornés.

Théorème 1. *Soit D un domaine privé de variétés de ramification, et soit, dans ce domaine, une suite de transformations analytiques $S_1, \ldots, S_k, \ldots$ qui convergent uniformément vers une transformation analytique S. Supposons que*: 1° *S soit topologique dans D*; 2° *S transforme D en un domaine D' privé de variétés de ramification*[8]). *Alors, étant donnés arbitrairement deux sous-domaines Δ et Δ_1 complètement intérieurs à D, et tels que Δ soit complètement intérieur à Δ_1, on peut trouver un entier K qui jouit de la propriété suivante: pour toute valeur de k plus grande que K,*

1° *S_k est topologique dans Δ_1*;

2° *le domaine $S_k(\Delta_1)$ est un sous-domaine de D'*;

3° *le domaine $S(\Delta)$ est un sous-domaine de $S_k(\Delta_1)$.*

La première partie du théorème résulte du fait que les jacobiens des transformations S_k convergent uniformément vers le jacobien de S; comme ce dernier ne s'annule pas dans D, le jacobien des S_k ne s'annule pas dans Δ_1 dès que k est plus grand qu'un certain nombre K_1. Donc, si $k > K_1$, non seulement S_k est topologique dans Δ_1, mais le domaine $S_k(\Delta_1)$ ne possède aucune variété de ramification. D'ailleurs, le domaine $S_k(\Delta_1)$ est intérieur à D' dès que k est plus grand qu'un certain nombre K_2 $(K_2 \geqq K_1)$, puisque le domaine $S(\Delta_1)$ est complètement intérieur à D' et que les transformations S_k convergent uniformément vers S.

Pour montrer la deuxième partie du théorème, il faut montrer l'existence d'un nombre K_3 $(K_3 \geqq K_2)$ tel que, pour tout $k > K_3$, le domaine $S_k(\Delta_1)$ soit non seulement intérieur à D', mais encore *univalent par rapport à D'*. Or, admettons qu'un tel nombre K_3 n'existe pas. On pourrait trouver une suite infinie croissante d'entiers $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$ et une suite correspondante de couples de points distincts M_{λ_k} et P_{λ_k} du domaine Δ_1 tels que les points $S_{\lambda_k}(M_{\lambda_k})$ et $S_{\lambda_k}(P_{\lambda_k})$ fussent confondus en un même point de D'. On pourrait, en extrayant au besoin de la suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$

[8]) Ces deux hypothèses équivalent à la suivante: le jacobien de S ne s'annule pas dans D.

une nouvelle suite, supposer que les points M_{λ_k} et P_{λ_k} tendent respectivement vers deux points M_0 et P_0, intérieur au domaine D. Les points transformés $S(M_0)$ et $S(P_0)$ seraient confondus en un même point de D', ce qui exigerait que P_0 fût confondu avec M_0. Cela posé, soit Σ une hypersphère complètement intérieure à D et dont le centre est en M_0; nous supposerons en outre le rayon de Σ assez petit pour que le domaine $S(\Sigma)$ soit univalent. Le nombre des solutions de l'équation en M

$$S_{\lambda_k}(M) = S_{\lambda_k}(M_{\lambda_k})$$

qui sont intérieures à Σ est au moins égal à *deux* si λ_k est assez grand; or ce nombre est égal à une certaine intégrale (intégrale de Kronecker) étendue à la frontière de Σ. Lorsque λ_k augmente indéfiniment, la valeur de cette intégrale tend, à cause de la convergence uniforme, vers la valeur de l'intégrale donnant le nombre des solutions de l'équation

$$S(M) = S(M_0),$$

c'est-à-dire vers *un*. Nous arrivons ainsi à une contradiction. C. Q. F. D.

La troisième partie du théorème 1 se démontre d'une manière analogue, toujours à l'aide de l'intégrale de Kronecker.

Corollaire du théorème 1. *Les notations du théorème* 1 *étant conservées, les transformations* S_k^{-1} *convergent uniformément vers* S^{-1} *dans le domaine* D'. Remarquons d'abord que la transformation S_k^{-1} n'est pas forcément définie dans le domaine D' tout entier; mais, étant donné arbitrairement un sous-domaine Δ' complètement intérieur à D', le théorème I montre que Δ' est un sous-domaine de $S_k(D)$ pour toutes les valeurs de k plus grandes qu'un certain nombre $K(\Delta')$; par suite, dès que $k > K(\Delta')$, la transformation S_k^{-1} est définie dans Δ'. Cela posé, le corollaire, tel qu'il est énoncé, signifie que, dans tout sous-domaine Δ' complètement intérieur à D', les transformations S_k^{-1} (qui sont bien définies à partir d'un certain rang) convergent uniformément vers S^{-1}.

§ 4.

Transformations intérieures et transformations biunivoques d'un domaine.

Définition. Nous dirons qu'une transformation S, analytique dans un domaine D, *transforme* D *en un domaine intérieur à* D' s'il existe une correspondance continue qui associe à chaque point M de D un point M' de D' et un seul ayant les mêmes coordonnées que $S(M)$.

La définition précédente s'applique aussi bien aux transformations exceptionnelles, *ou même dégénérées*, qu'aux transformations topologiques. Elle s'applique en particulier au cas où le domaine D' est identique au domaine D: toute transformation analytique S qui transforme D en un

domaine intérieur à D sera dite, par abréviation, *transformation intérieure du domaine D*.

Lemme 1. *Soient D et D' deux domaines. Considérons une suite de transformations analytiques $S_1, \ldots, S_k, \ldots$ dont chacune transforme D en un domaine intérieur à D'; supposons que les S_k convergent uniformément dans D vers une transformation S non dégénérée. Alors on peut trouver un sous-domaine univalent Σ de D et un sous-domaine univalent Σ' de D', tels que S établisse une correspondance biunivoque (topologique) entre Σ et Σ'.*

En effet, les transformés par S des points de D, étant limites de points intérieurs à D', sont des points intérieurs à D' ou des points frontières de D'. Mais, S n'étant pas dégénérée, ces points ne sont pas tous des points frontières. Soit donc A un point de D dont le transformé $A' = S(A)$ est intérieur à D'; tous les points de D suffisamment voisins de A sont transformés par S en des points intérieurs à D'. Parmi eux, il en est au moins un, soit O, qui n'est pas un point de ramification pour D et en lequel le jacobien de S ne s'annule pas. Soit alors Σ un hypersphère de centre O et de rayon assez petit pour que la transformation S soit topologique dans Σ et transforme Σ en un domaine univalent Σ' intérieur à D'. L'existence de Σ et Σ' démontre le lemme. C. Q. F. D.

Lemme 2. *Soient D et D' deux domaines. Soient S une transformation analytique qui transforme D en un domaine intérieur à D', et S' une transformation analytique qui transforme D' en un domaine intérieur à D. Si la transformation $S'S$* [9]) *est une transformation biunivoque de D en lui-même, alors on a*

$$D' = S(D), \qquad D = S'(D'). \text{ [10]})$$

Montrons d'abord que S est topologique dans D et transforme D en un sous-domaine de D'. Il suffit de montrer que deux points distincts M_1 et M_2 du domaine D sont toujours transformés par S en deux points distincts de D'. Or, supposons les points $S(M_1)$ et $S(M_2)$ confondus en un même point de D'; les points $S'S(M_1)$ et $S'S(M_2)$ seraient confondus en un même point de D; autrement dit, M_1 et M_2 seraient confondus en un même point de D. C. Q. F. D.

Cela posé, soit $D_1' = S(D)$. La transformation S' est topologique dans D_1' (pour la même raison qui veut que S soit topologique dans D); d'autre part, puisque $S'S$ est une transformation biunivoque de D en

---

[9]) La notation $S'S$ indique que la transformation S est effectuée d'abord, la transformation S' ensuite.

[10]) Au sujet de cette notation, voir la fin du paragraphe 2 de ce travail.

lui-même, S' transforme biunivoquement D_1' en D. Je dis que D_1' n'a aucun point frontière intérieur à D'; en effet, si un tel point M' existait, son transformé $S'(M')$ serait bien déterminé; d'autre part, à cause de

$$D = S'(D_1'),$$

le point $S'(M')$ serait un point frontière de D, ce qui est contraire au fait que S' transforme D' en un domaine *intérieur* à D. Ainsi, le domaine D_1' est un sous-domaine de D' et n'a aucun point frontière intérieur à D'; il est donc identique à D', ce qui démontre le lemme.

Corollaire. Si le produit de deux transformations intérieures d'un domaine D est une transformation biunivoque de D en lui-même, chacune des transformations envisagées est une transformation biunivoque de D en lui-même.

Théorème 2. *Si une suite de transformations biunivoques $S_1, \ldots, S_p, \ldots$ d'un domaine borné D en lui-même converge uniformément vers une transformation limite S, et s'il existe dans D au moins un point intérieur A dont les transformés $A_p' = S_p(A)$ tendent vers un point intérieur à D, alors S est une transformation biunivoque de D en lui-même*[11]).

Montrons d'abord que la transformation S n'est pas dégénérée. Il existe, dans le domaine D, un certain voisinage V du point A, tel que, O étant un point quelconque de V, les transformés $O_p' = S_p(O)$ tendent vers un point O' intérieur à D. Cela étant, on peut choisir O de façon que O ne soit pas un point de ramification pour D, ni O'.

Pour montrer que S n'est pas dégénérée, il suffit de montrer que les modules des jacobiens des transformations S_p admettent, au point O, une borne inférieure non nulle (au moins à partir d'une certaine valeur de p). Or cela résulte du fait que les transformations S_p^{-1} forment une famille normale dans D (puisque D est borné); par suite, les jacobiens des S_p^{-1} admettent, au voisinage de O', une borne supérieure fixe. C. Q. F. D.

Ainsi, S n'est pas dégénérée. Avant d'aller plus loin, faisons une remarque: il résulte de ce qui précède que si une suite de transformations biunivoques d'un domaine borné D converge uniformément vers une transformation *dégénérée* S, S transforme D en une variété analytique tracée *sur la frontière* de D; donc, *s'il n'existe aucune variété analytique sur la frontière de D, S transforme D en un point unique.* C'est le cas, d'ailleurs connu, de l'hypersphère.

Terminons maintenant la démonstration du théorème 2. Il suffit de démontrer le lemme:

---

[11]) Cf. [b], Satz 10. Notre théorème 2 s'applique aux domaines non univalents, même s'ils contiennent des variétés de ramification.

Lemme 3. *Si une suite de transformations biunivoques* $S_1, \ldots, S_p, \ldots$ *d'un domaine borné* D *en lui-même converge uniformément vers une transformation limite* S *non dégénérée, la transformation* S *est biunivoque.*

D'après ce qui précède, il existe à l'intérieur de D un point O qui n'est pas un point de ramification et dont le transformé $O' = S(O)$ est intérieur à D et n'est pas un point de ramification. Désignons par Σ un sous-domaine univalent de D, contenant le point O, et assez petit pour que son transformé Σ' par S soit univalent. D'après le corollaire du théorème 1 (§ 3), les transformations S_p^{-1} convergent uniformément vers S^{-1} dans Σ'; comme elles constituent une famille normale dans D, elles convergent uniformément dans le domaine D tout entier [12]). Soit S' la transformation-limite; S' est définie dans D, et d'ailleurs identique à S^{-1} dans Σ'.

Si nous prouvons que S et S' sont des *transformations intérieures* du domaine D, alors la transformation $S'S$ sera bien définie dans D tout entier; comme $S'S$ n'est autre que la transformation identique dans Σ, $S'S$ sera aussi la transformation identique dans D; en particulier, $S'S$ sera une transformation biunivoque de D en lui-même. En vertu du corollaire du lemme 2, nous pourrons conclure que S est bien une transformation biunivoque du domaine D en lui-même.

Il suffit donc de montrer que S est une transformation intérieure du domaine D (le raisonnement sera le même pour S') [13]). Admettons que S ne soit pas une transformation intérieure: on pourrait trouver une courbe C, intérieure à D, partant de O et aboutissant en un point intérieur P, telle que la transformée C' de C par S fût intérieure à D, exception faite pour le point $P' = S(P)$ qui serait un point frontière de D. Nous allons montrer qu'une telle éventualité est à rejeter.

L'indice k restant fixe, et p augmentant indéfiniment, les transformations $S_k^{-1}S_p$ forment une famille normale dans D, et, dans Σ, elles convergent uniformément vers la transformation $S_k^{-1}S$; elles convergent donc uniformément dans D vers une transformation T_k qui est identique à $S_k^{-1}S$ dans Σ. Il résulte de là que le transformé $T_k(M)$ d'un point M qui décrit la courbe C tend vers une limite quand le point M tend vers P; d'ailleurs, S_k^{-1} étant une transformation biunivoque de D en lui-même, le point $T_k(P)$ est nécessairement un point *frontière* de D.

---

[12]) Ceci, en vertu du théorème connu: si une suite de fonctions, appartenant à une famille normale dans un domaine Δ, converge uniformément dans un sous-domaine de Δ, elle converge uniformément dans Δ.

[13]) La démonstration qui va suivre est calquée sur celle du théorème XXI (page 58) de mon mémoire: Les fonctions de deux variables complexes, etc., Journal de Math. (10) **9** (1931), p. 1—114.

Faisons maintenant croître k indéfiniment. Les transformations T_k forment une famille normale dans D, et, dans Σ, elles convergent uniformément vers $S^{-1}S$, c'est-à-dire vers la transformation identique. Donc T_k converge uniformément vers la transformation identique dans le domaine D; en particulier, le point $T_k(P)$ tend vers P. Mais nous arrivons à une contradiction, car un point P intérieur à D ne saurait être limite de points frontières $T_k(P)$.

Le lemme 3, et par suite le théorème 2, est donc complètement démontré.

§ 5.

Sur l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné.

Théorème 3. *Soit S une transformation intérieure d'un domaine D. Si une suite de puissances de cette transformation, soit $S^{\lambda_1}, \ldots, S^{\lambda_k}, \ldots$ (les exposants positifs λ_k étant bornés ou non) converge uniformément dans D vers une transformation biunivoque T de D en lui-même, alors S est une transformation biunivoque de D en lui-même.*

Si les exposants λ_k sont bornés, il existe une puissance S^p qui est une transformation biunivoque de D en lui-même. Le lemme 2, appliqué à S et à $S' = S^{p-1}$, permet de conclure que S est biunivoque.

Dans le cas général, on peut raisonner de la façon suivante:

1° *S est topologique dans D et transforme D en un sous-domaine Δ de D.* Pour le prouver, il suffit de montrer que deux points distincts M_1 et M_2 du domaine D ont toujours deux transformés distincts $S(M_1)$ et $S(M_2)$. En effet, si $S(M_1)$ et $S(M_2)$ étaient confondus, $S^{\lambda_k}(M_1)$ et $S^{\lambda_k}(M_2)$ seraient confondus, et, à la limite, $T(M_1)$ et $T(M_2)$ seraient confondus; T étant biunivoque, M_1 et M_2 seraient confondus. C. Q. F. D.

2° *Le domaine Δ est identique à D.* Il suffit de montrer que tout point de D appartient aussi à Δ. Or, si un point M_0 de D n'appartenait pas à $\Delta = S(D)$, il n'appartiendrait pas aux domaines $S^{\lambda_k}(D) = S \cdot S^{\lambda_k - 1}(D)$. On serait donc en contradiction avec la troisième partie du théorème 1 (§ 3). C. Q. F. D.

Théorème 4 (théorème fondamental). *Soit S une transformation intérieure d'un domaine borné D. Si une suite de puissances $S^{p_1}, \ldots, S^{p_k}, \ldots$ $(p_1 < p_2 < \ldots p_k < \ldots)$ converge uniformément dans D vers une transformation T non dégénérée, alors la suite $S^{p_{k+1} - p_k}$ converge uniformément dans D vers la transformation identique. En particulier, S est une transformation biunivoque de D en lui-même* (en vertu du théorème 3), *et T également* (en vertu du lemme 3).

Corollaire. *La limite d'une suite uniformément convergente de puissances croissantes d'une transformation intérieure d'un domaine borné D*

est une transformation biunivoque de D en lui-même ou une transformation dégénérée.

Démonstration du théorème 4. En vertu du lemme 1, on peut trouver deux sous-domaines univalents Σ et Σ' du domaine D, tels que la transformation T soit topologique dans Σ et transforme biunivoquement Σ en Σ'. En vertu du corollaire du théorème I, les transformations $(S^{p_k})^{-1}$ convergent uniformément vers T^{-1} dans Σ'; par suite, les transformations

$$S^{p_{k+1}-p_k} = (S^{p_k})^{-1} \cdot S^{p_{k+1}}$$

convergent uniformément dans Σ vers la transformation identique. Comme ces transformations appartiennent à une famille normale dans D, elles convergent uniformément dans D vers la transformation identique. C. Q. F. D.

Le théorème précédent est tout à fait fondamental. Il peut servir dans bien des problèmes. Indiquons-en, à titre d'exemples, deux applications intéressantes.

Première application du théorème fondamental. Soit D un domaine borné, et soit O un point intérieur autre qu'un point de ramification. *Si une transformation S intérieure du domaine D laisse fixe O, et si le module, au point O, du jacobien de S est égal à un, S est une transformation biunivoque de D en lui-même.*

Cette proposition, qui faisait l'objet essentiel de l'article [a], peut maintenant se démontrer de la façon suivante: de la suite $S, S^2, \ldots, S^p, \ldots$, qui est normale, on peut extraire une suite uniformément convergente; le module, au point O, de la transformation limite T étant égal à *un*, T n'est pas dégénérée. Donc (théorème 4) S est biunivoque. C. Q. F. D.

Deuxième application du théorème fondamental. Bornons-nous, pour simplifier, au cas d'une seule variable complexe z. Soit, dans le plan z, un domaine *borné* D multiplement connexe (d'ordre fini ou infini). Soit d'autre part S une transformation intérieure de D. *Pour qu'on puisse affirmer que S est une transformation biunivoque du domaine D en lui-même, il suffit que l'une ou l'autre des deux circonstances suivantes se trouve réalisée:*

α) Il existe dans D une courbe fermée particulière C, non topologiquement équivalente à zéro et non réductible à un point[14]*), telle que la courbe C' transformée de C par S soit topologiquement équivalente à C;*

[14]) Nous disons qu'une courbe fermée Γ, intérieure à D et non topologiquement équivalente à zéro, est *réductible à un point*, s'il existe un point frontière M_0 du domaine D, tel que dans un voisinage arbitraire de M_0 on puisse trouver une courbe fermée intérieure à D et topologiquement équivalente à Γ. Si D n'admet aucun point frontière isolé, aucune courbe fermée non topologiquement équivalente à zéro n'est réductible à un point.

β) D n'admet aucun point frontière isolé, et il n'existe, dans le domaine D, aucune courbe fermée non topologiquement équivalente à zéro dont la transformée par S soit topologiquement équivalente à zéro.

Démonstration. Aucune suite uniformément convergente extraite de la suite $S, S^2, \ldots, S^p, \ldots$ ne peut avoir pour limite une transformation dégénérée, à cause de l'hypothèse α) ou de l'hypothèse β). Donc (théorème fondamental) S est biunivoque. C. Q. F. D.

Comme application, proposons-nous de retrouver un théorème de M. Carathéodory ([b], Satz 14). Soit D un domaine *borné* multiplement connexe (d'ordre fini ou infini), et soit O un point intérieur à D, autre qu'un point de ramification (nous pouvons supposer O à l'origine $z = 0$). Il existe alors un nombre positif Ω, *plus petit que un*, qui dépend seulement de D et du point O, et qui jouit de la propriété suivante: *toute transformation intérieure du domaine D*

$$(S) \quad z' = f(z),$$

pour laquelle on a

$$f(0) = 0, \quad |f'(0)| > \Omega,$$

est nécessairement une transformation biunivoque de D en lui-même (et, par suite, on a $|f'(0)| = 1$).

Supposons en effet qu'un tel nombre Ω n'existe pas. On pourrait alors trouver une suite de transformations intérieures *non biunivoques* $S_1, \ldots, S_p, \ldots$,

$$(S_p) \quad z' = f_p(z),$$

pour lesquelles on aurait

$$f_p(0) = 0, \quad \lim_{p \to \infty} |f_p'(0)| = 1.$$

Or, on peut supposer que les transformations S_p convergent uniformément vers une transformation limite S (sinon, il suffirait d'extraire de la suite des S_p une suite partielle uniformément convergente). Soit donc

$$(S) \quad z' = f(z)$$

la transformation limite; on a

$$f(0) = 0, \quad |f'(0)| = 1.$$

S, n'étant pas dégénérée, est topologique (car nous sommes dans le cas d'une seule variable complexe). Puisque S est topologique et est limite de transformations intérieures, S est une transformation intérieure du domaine D; S est donc une transformation biunivoque de D en lui-même.

Cela posé, de deux choses l'une. *Ou bien D* possède au moins un point frontière isolé M_0; dans ce cas la fonction f_p est holomorphe en M_0, puisqu'elle est holomorphe en tous les points voisins et bornée; comme,

d'autre part, les transformations $S^{-1}S_p$ sont intérieures et convergent vers la transformation identique, elles laissent fixe le point M_0 à partir d'une certaine valeur de p. Or elles laissent aussi fixe le point O; elles sont donc *biunivoques* (on s'en assure en considérant les itérées de chacune d'elles et en appliquant le théorème fondamental 4). *Ou bien* il existe dans D au moins une courbe fermée C non topologiquement équivalente à zéro et non réductible à un point. Alors, à partir d'une certaine valeur de p, toutes les transformations $S^{-1}S_p$ se trouvent dans le cas α) (page 771); elles sont donc biunivoques, et l'on arrive encore à une contradiction.

L'existence du nombre Ω est donc démontrée dans tous les cas. La détermination effective de Ω semble assez facile dans le cas où D est une couronne circulaire.

Il va sans dire que, moyennant quelques précautions, les derniers énoncés qui précèdent peuvent être étendus au cas de plusieurs variables complexes.

(Eingegangen am 15. Dezember 1931.)

Über einige trigonometrische Summen.

Zweite Abhandlung.

Von

Arnold Walfisz in Radość (Polen).

Bezeichnungen. Es sei θ eine reelle irrationale Zahl; $0 < \theta < 1$;[1]

$$\theta = \frac{1}{|a_1} + \frac{1}{|a_2} + \dots \tag{1}$$

die Entwicklung von θ in einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch;

$$\frac{h_0}{k_0} = \frac{0}{1}, \frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}, \dots \tag{2}$$

die Folge der Näherungsbrüche bei der Darstellung (1).[2]

Ich ordne jedem θ eine natürliche Zahl ν und eine Folge natürlicher Zahlen b_n so zu: Ist

Fall I: $$\limsup_{n=\infty} a_n = \infty,$$

so sei $\nu = 1$; ist aber

Fall II: $$\limsup_{n=\infty} a_n = \alpha < \infty,$$

so bezeichne ν die kleinste natürliche Zahl, für die

$$a_n \leqq \alpha \qquad (n \geqq \nu). \tag{3}$$

Ich setze ferner

$$b_n = \operatorname{Max}(a_1, \dots, a_{\nu-1}) \quad \text{für} \quad n < \nu, \tag{4}$$

$$b_n = \operatorname{Max}(a_\nu, \dots, a_n) \quad \text{für} \quad n \geqq \nu \tag{5}$$

(für $\nu = 1$ fällt (4) weg).

---

[1]) Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da die trigonometrischen Summen (7), welche ich in der vorliegenden Abhandlung betrachte, wegen (6) in θ die Periode Eins haben.

[2]) Für die im folgenden benutzten Eigenschaften der Kettenbrüche verweise ich auf das Buch von O. Perron „Die Lehre von den Kettenbrüchen“ (Leipzig und Berlin 1913, zweite Auflage 1929).

Die der Zahl θ zugeordnete b_n-Folge ist für $n \geqq \nu$ nicht abnehmend; im Falle I wächst sie über alle Grenzen, im Falle II ist von einer Stelle ab $b_n = \alpha$.

Für beliebige reelle u setze ich

$$(6) \qquad R(u) = u - [u], \qquad \{u\} = \operatorname{Min}(R(u), 1 - R(u)), \qquad e(u) = e^{2\pi i u}.$$

Es sei $d(n)$ die Teileranzahl der natürlichen Zahl n; $r_k(n)$ ihre Zerlegungsanzahl in $k \geqq 2$ Quadrate;

$$(7) \qquad D(x) = \sum_{n \leqq x} d(n)\, e(n\theta), \qquad R_k(x) = \sum_{n \leqq x} r_k(n)\, e(n\theta)$$

(falls die unteren Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins);

$$(8) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, s^n \quad \text{für} \quad |s| < 1.$$

Für komplexe y mit positivem Realteil bezeichne $\log y$ den Hauptzweig.

Ich bezeichne: mit A positive absolute Konstanten; mit B komplexe Zahlen, für die $|B| < A$ ist; mit c positive Zahlen, die nur von θ bzw. von θ und ε (wenn ε in den Behauptungen vorkommt) abhängen dürfen. Hierbei ist ε eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl. Im allgemeinen werden die A, B, c unterschiedslos gebraucht, hin und wieder hebe ich aber einige durch Indizes hervor. γ bedeute die Eulersche Konstante. Es sei stets $x \geqq 27$.

Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

Problemstellung. In der ersten gleichnamigen Abhandlung[3]) zeigte ich, daß für fast alle θ (d. h. für alle θ, von einer Lebesgueschen Nullmenge abgesehen)

$$(9) \qquad D(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} x \log\log x)$$

ist (I (22)). Hierbei benutzte ich folgenden tiefliegenden Satz T. Estermanns[4]):

Satz I: *Es sei*

$$z = e^{\frac{2h\pi i}{k} - y}$$

h und k ganz, $k > 0$, $(h, k) = 1$; $\Re(y) > 0$, $k|y| < 8\sqrt{\Re(y)}$; .

Dann gilt

$$(10) \qquad f(z) = \frac{1}{ky}(\gamma - \log y - 2\log k) + B\,\frac{|y|\, k \log 2k}{\Re(y)}.$$

---

[3]) Mathematische Zeitschrift **33** (1931), S. 564–601); im folgenden kurz I genannt.

[4]) T. Estermann „On the representations of a number as the sum of three products“ [Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, **29** (1929), S. 453–478], Lemma 11.

Hierauf nahm S. Chowla gemeinsam mit mir das Problem wieder auf. Es gelang uns mit einfachsten Mitteln folgende Abschätzung (11) nachzuweisen, die zwar schwächer als (10) ist, doch ebensogut zu (9) führt[5]):

Satz II: *Es sei*

$$h \text{ und } k \text{ ganz}, \quad k>1, \quad (h,k)=1;$$

$$y=\sigma+ti, \quad \sigma \text{ und } t \text{ reell}, \quad 0<\sigma\leqq\frac{1}{k^2}, \quad |t|\leqq\sigma; \quad z=e^{\frac{2h\pi i}{k}-y}.$$

Dann gilt

$$f(z)=\frac{1}{ky}(\gamma-\log y-2\log k)+B(\sigma^{-\frac{1}{2}}+k\log k). \tag{11}$$

Aus (11) folgerten wir, über (9) hinaus,

$$\Re D(x)=\Omega_R(x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}x(\log\log x)^{\frac{3}{2}}),$$

$$\Im D(x)=\Omega_{\underset{L}{R}}(x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}x(\log\log x)^{\frac{3}{2}}),$$

beides für fast alle θ.

(10) und (11) versagen, sobald die Nenner in der Folge (2) zu langsam wachsen, wenn z. B.

$$k_{n+1}\leqq c\,\frac{k_n\log k_n}{(\log\log k_n)^2}$$

ist. Wahrscheinlich gilt für jedes irrationale θ

$$D(x)=\Omega(\sqrt{x}).$$

Dies kann ich nicht nachweisen[6]), doch werde ich im folgenden zeigen:

Hauptsatz: 1) *Im Falle* I *gilt*

$$\limsup_{x=\infty} x^{-\frac{1}{2}}\Re D(x) \quad =\infty, \tag{12}$$

$$\limsup_{x=\infty} x^{-\frac{1}{2}}|\Im D(x)| =\infty; \tag{13}$$

2) *es gibt ein* A_1, *so daß im Falle* II *für jedes* θ *mit* $\alpha\geqq A_1$

$$\limsup_{x=\infty} x^{-\frac{1}{2}}\Re D(x) \quad \geqq\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\log\alpha, \tag{14}$$

$$\limsup_{x=\infty} x^{-\frac{1}{2}}|\Im D(x)| \geqq\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\log\alpha \tag{15}$$

ist.

[5]) S. Chowla und A. Walfisz „On a trigonometric sum" [im Druck bei den Proceedings of the London Mathematical Society]; im folgenden kurz II genannt.

[6]) Für die zu $D(x)$ analoge Summe $R_2(x)$ gilt tatsächlich

$$R_2(x)=\Omega(\sqrt{x}) \qquad (\theta \text{ irrational}),$$

wie A. Oppenheim leicht aus einem Hardy-Littlewoodschen Satze schließen konnte (Literaturangaben in I: Fußnoten [1]), [6]), [7])). Hier hat man jedoch die Transformationstheorie der Thetafunktionen zur Verfügung.

Hierzu ersetze ich Satz II durch folgenden

Satz III: *Es sei*

$$h = h_n, \quad k = k_n, \quad b = b_n;$$

(16) $$y = \sigma + ti, \quad \sigma \text{ und } t \text{ reell}, \quad 0 < \sigma \leqq \frac{2\pi}{k^2}, \quad |t| \leqq \sigma; \quad z = e^{\frac{2h\pi i}{k} - y}.$$

Dann gilt für $k > c_1$

(17) $$f(z) = \frac{1}{ky}(\gamma - \log y - 2\log k) + B(\sigma^{-\frac{1}{2}} + kb).$$

Dieser Satz wird, nachdem in § 1 die wichtigsten Vorbereitungen getroffen worden sind, in § 2 bewiesen; anschließend bringe ich dann (12) bis (15). In § 3 gebe ich einen einfachen Hilfssatz, der die „fast alle"-Abschätzungen

(18) $$D(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} x),$$

(19) $$R_2(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} x),$$

(20) $$R_3(x) = O(x^{\frac{3}{4}} \log^{2+\varepsilon} x),$$

(21) $$R_4(x) = O(x \log^{3+\varepsilon} x)$$

(I: (21), (9), (11), (12)) zu

(22) $$D(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log^{1+\varepsilon} x),$$

(23) $$R_2(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log^{1+\varepsilon} x),$$

(24) $$R_3(x) = O(x^{\frac{3}{4}} \log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} x),$$

(25) $$R_4(x) = O(x \log^{2+\varepsilon} x)$$

verschärft.

§ 1.

Es seien h und k zunächst ganz beliebige teilerfremde natürliche Zahlen; von den Voraussetzungen (16) will ich erst später Gebrauch machen. In den folgenden Summen $\sum'$ werden die durch k teilbaren a-Werte ausgelassen. Ich setze

(26) $$S_2(x) = \sum_{a \leqq \sqrt{x}}' \operatorname{ctg} \frac{ah\pi}{k} e\left(\frac{a^2 h}{k}\right), \qquad T_2(x) = \sum_{n \leqq x} S_2(n).$$ [7])

Hilfssatz 1:

(27) $$S_2(x) = \frac{1}{2} \sum_{a \leqq \sqrt{x}}' \operatorname{ctg} \frac{ah\pi}{k} e\left(\frac{[\sqrt{x}]\, ah}{k}\right) + \frac{1}{2} \sum_{a \leqq \sqrt{x}}' \operatorname{ctg} \frac{ah\pi}{k} + B(\sqrt{x} + k).$$

---

[7]) Da ich den Beweis von (17) in den von (11) einordnen will (§ 2), so behalte ich die Bezeichnungen $S_2(x)$, $T_2(x)$ aus II: (12), (13), (34) und (35) bei.

Beweis:

$$(28)\quad e\Big(\frac{a^2h}{k}\Big)=\Big(e\Big(\frac{ah}{k}\Big)-1\Big)\sum_{n=0}^{a-1}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)+1=2i\sin\frac{ah\pi}{k}\,e\Big(\frac{ah}{2k}\Big)\sum_{n=0}^{a-1}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)+1.$$

$$(29)\quad S_2(x)=2i\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\cos\frac{ah\pi}{k}\,e\Big(\frac{ah}{2k}\Big)\sum_{n=0}^{a-1}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)+\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\qquad(\mathbf{26},\ \mathbf{28}).$$

$$2i\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\cos\frac{ah\pi}{k}\,e\Big(\frac{ah}{2k}\Big)\sum_{n=0}^{a-1}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)=2i\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\frac{1}{2}\Big(e\Big(\frac{ah}{k}\Big)+1\Big)\sum_{n=0}^{a-1}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)$$

$$=i\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\sum_{n=1}^{a}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)+i\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\sum_{n=0}^{a-1}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)$$

$$(30)\qquad=2i\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\sum_{n=1}^{a}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)+B\sqrt{x}.$$

$$\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{x}\\ k\mid a}}\sum_{n=1}^{a}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)=\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{x}\\ k\mid a}}a=\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}ka=\frac{1}{2}k\Big[\frac{\sqrt{x}}{k}\Big]\Big[\frac{\sqrt{x}}{k}+1\Big]$$

$$(31)\qquad=\frac{1}{2}k\Big(\frac{\sqrt{x}}{k}+B\Big)\Big(\frac{\sqrt{x}}{k}+B\Big)=\frac{x}{2k}+B(\sqrt{x}+k).$$

$$2i\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\sum_{n=1}^{a}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)=2i\sum_{n\leqq a\leqq\sqrt{x}}\sum e\Big(\frac{nah}{k}\Big)-\frac{x}{k}i+B(\sqrt{x}+k)\qquad(\mathbf{31})$$

$$(32)\qquad=i\sum_{a,n\leqq\sqrt{x}}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)-\frac{x}{k}i+B(\sqrt{x}+k).$$

$$\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{x}\\ k\mid a}}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)=\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{x}\\ k\mid a}}[\sqrt{x}]=[\sqrt{x}]\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}1=[\sqrt{x}]\Big[\frac{\sqrt{x}}{k}\Big]$$

$$(33)\qquad=\frac{x}{k}+B\sqrt{x}.$$

$$(34)\qquad i\sum_{a,n\leqq\sqrt{x}}e\Big(\frac{nah}{k}\Big)-\frac{x}{k}i=i\sum_{a,n\leqq\sqrt{x}}{}'e\Big(\frac{nah}{k}\Big)+B\sqrt{x}\qquad(\mathbf{33}).$$

$$(35)\qquad S_2(x)=i\sum_{a,n\leqq\sqrt{x}}{}'e\Big(\frac{nah}{k}\Big)+\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}+B(\sqrt{x}+k)$$

$$(\mathbf{29},\ \mathbf{30},\ \mathbf{32},\ \mathbf{34}).$$

$$(36)\quad \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\,e\Big(\frac{ah}{k}\Big)=\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\Big(1-2\sin^2\frac{ah\pi}{k}+2i\sin\frac{ah\pi}{h}\cos\frac{ah\pi}{h}\Big)=\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{h}-I$$

$$(k+a).$$

$$(k+a)\sum_{n\leqq\sqrt{x}} e\Big(\frac{nah}{k}\Big) = \frac{1}{2i\sin\frac{ah\pi}{k}}\, e\Big(-\frac{ah}{2k}\Big)\Big(e\Big([\sqrt{x}+1]\frac{ah}{k}\Big)-e\Big(\frac{ah}{k}\Big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\Big(e\Big([\sqrt{x}+1]\frac{ah}{k}\Big)-e\Big(\frac{ah}{k}\Big)\Big)+B$$

$$= \frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\, e\Big(\frac{ah}{k}\Big)\Big(e\Big(\frac{[\sqrt{x}]ah}{k}\Big)-1\Big)+B$$

(37) $$= \frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\Big(e\Big(\frac{[\sqrt{x}]ah}{k}\Big)-1\Big)+B \qquad (36).$$

Aus (35) und (37) folgt (27).

Hilfssatz 2:[8]) *Es sei $p\leqq q$, $F(u)$ im Intervall $p\leqq u\leqq q$ definiert, reell und zweimal differenzierbar, $|F'(q)-F'(p)|<2$, $F''(u)$ stets $\geqq\omega$ oder stets $\leqq-\omega$, wo ω eine von u unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann ist*

(38) $$\sum_{p\leqq n\leqq q} e(F(n)) = B\Big(\frac{1}{\sqrt{\omega}}+1\Big).$$

Hilfssatz 3:

(39) $$T_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}{\sum_{a\leqq\sqrt{n}}}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k} + B(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}k^{\frac{3}{2}}).$$

Beweis:

40) $$T_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}{\sum_{a\leqq\sqrt{n}}}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\, e\Big(\frac{[\sqrt{n}]ah}{k}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{n\leqq x}{\sum_{a\leqq\sqrt{n}}}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{h} + B(x^{\frac{3}{2}}+xk) \qquad (26, 27).$$

$$\sum_{n\leqq x}{\sum_{a\leqq\sqrt{n}}}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\, e\Big(\frac{[\sqrt{n}]ah}{k}\Big) = \sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\sum_{a^2\leqq n\leqq x} e\Big(\frac{[\sqrt{n}]ah}{k}\Big)$$

$$= B\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}^{-1}\Big|\sum_{a^2\leqq n\leqq x} e\Big(\frac{[\sqrt{n}]ah}{k}\Big)\Big| = B\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}^{-1}\Big|\sum_{a^2\leqq n\leqq x} e\Big([\sqrt{n}]\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}\Big)\Big| \qquad (6)$$

$$= B\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}^{-1}\Big|\sum_{a^2\leqq n\leqq x} e\Big(\sqrt{n}\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}\Big)\Big| + B\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}^{-1}\sum_{a^2\leqq n\leqq x}\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}$$

41) $$= B\sum_{a\leqq\sqrt{x}}{}'\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}^{-1}\sum_{a^2\leqq n\leqq x} e\Big(\sqrt{n}\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}\Big) + Bx^{\frac{3}{2}}.$$

Auf die innere Summe in (41) kann ich (38) mit

$$p=a^2,\quad q=x,\quad F(u)=\sqrt{u}\Big\{\frac{ah}{k}\Big\},\quad \omega=\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}\Big\{\frac{ah}{k}\Big\}$$

---

[8]) J. G. van der Corput „Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem" [Mathematische Annalen 87 (1922), S. 39–65], Hilfssatz 3.

anwenden; denn in $p \leqq u \leqq q$ ist $F(u)$ zweimal differenzierbar,

$$|F'(u)| = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left\{\frac{ah}{k}\right\} < 1, \qquad F''(u) = -\frac{1}{4u^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{ah}{k}\right\} \leqq -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{ah}{k}\right\}.$$

Es folgt

$$(42) \qquad \sum_{a^2 \leqq n \leqq x} e\left(\sqrt{n}\left\{\frac{ah}{k}\right\}\right) = Bx^{\frac{3}{4}}\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$(43) \qquad \sum_{n \leqq x} \sum_{a \leqq \sqrt{n}}{}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}\, e\left(\frac{[\sqrt{n}]\,ah}{k}\right) = Bx^{\frac{3}{4}} \sum_{a \leqq \sqrt{x}}{}' \left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-\frac{3}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} \qquad (\mathbf{41, 42}).$$

$$(6) \qquad \sum_{a \leqq \sqrt{x}}{}' \left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-\frac{3}{2}} = B \sum_{a \leqq k\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{k}\right]+1\right)}{}' \left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-\frac{3}{2}} = B\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{k}\right]+1\right) \sum_{a \leqq k}{}' \left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$(44) \qquad = B\left(\frac{\sqrt{x}}{k}+1\right) \sum_{a=1}^{k-1} \left\{\frac{a}{k}\right\}^{-\frac{3}{2}} = B\left(\frac{\sqrt{x}}{k}+1\right) \sum_{a=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = B\left(\frac{\sqrt{x}}{k}+1\right) k^{\frac{3}{2}}.$$

$$T_2(x) = \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \sum_{a \leqq \sqrt{n}}{}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k} + B(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{4}}k^{\frac{1}{2}} + xk + x^{\frac{3}{4}}k^{\frac{3}{2}}) \qquad (\mathbf{40, 43, 44})$$

$$(39) \qquad = \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \sum_{a \leqq \sqrt{n}}{}' \operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k} + B(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{4}}k^{\frac{3}{2}}).$$

Von jetzt ab mache ich von den Voraussetzungen (16) bezüglich h, k und b Gebrauch. Ich nehme also an, daß für eine natürliche Zahl n

$$h = h_n, \qquad k = k_n, \qquad b = b_n$$

ist[9]).

Hilfssatz 4: *Die Entfernung je zweier* $R\left(\frac{ah}{k}\right)$, $a < k_q \leqq k$, *die im Intervall* $(0,1)$ *aufeinander folgen, ist* $> \frac{1}{2k_q}$.

Beweis: Anderenfalls gäbe es zwei natürliche Zahlen α_1, α_2 mit $\alpha_1 < k_q$, $\alpha_2 < k_q$, $\alpha_1 > \alpha_2$,

$$R\left(\frac{\alpha_1 h}{k}\right) - R\left(\frac{\alpha_2 h}{k}\right) \leqq \frac{1}{2k_q},$$

also ein ganzes $g \geqq 0$ mit

---

[9]) Bei den nächsten 4 Hilfssätzen benutze ich ein Verfahren, das ich kürzlich in der Note „Über eine trigonometrische Summe" [Journal of the London Mathematical Society 6 (1931), S. 169–172] zum Beweise der Hardy-Littlewoodschen Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{cosec} \nu\theta\pi = O(n)$$ für jedes irrationale θ mit beschränkten Kettenbruchnennern angewandt habe.

$$\left|\frac{(\alpha_1-\alpha_2)h}{k}-g\right|\leqq\frac{1}{2k_q},$$

$$\left|\frac{h}{k}-\frac{g}{\alpha_1-\alpha_2}\right|\leqq\frac{1}{2(\alpha_1-\alpha_2)k_q}<\frac{1}{2(\alpha_1-\alpha_2)^2}; \tag{45}$$

also ein ganzes p mit $0\leqq p<q$,

$$\frac{g}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{h_p}{k_p}.$$

Dann müßte aber

$$\left|\frac{h}{k}-\frac{g}{\alpha_1-\alpha_2}\right|>\frac{1}{2(\alpha_1-\alpha_2)k_{p+1}}\geqq\frac{1}{2(\alpha_1-\alpha_2)k_q}$$

sein, im Gegensatz zu (45).

Hilfssatz 5:

$$\sum_{a=1}^{m}\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-2}=Bk_q^2\quad\textit{für}\quad m<k_q\leqq k. \tag{46}$$

Beweis:

$$\sum_{a=1}^{m}\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-2}\leqq\sum_{a<k_q}\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-2}\leqq\sum_{a<k_q}\left(R^{-2}\left(\frac{ah}{k}\right)+\left(1-R\left(\frac{ah}{k}\right)\right)^{-2}\right)\quad(6), \tag{47}$$

$$R\left(\frac{ah}{k}\right)>\frac{1}{2k_q},\qquad 1-R\left(\frac{ah}{k}\right)>\frac{1}{2k_q}\qquad(a<k_q), \tag{48}$$

$$\sum_{a=1}^{m}\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-2}=Bk_q^2+B\sum_{a<k_q}\frac{k_q^2}{a^2}=Bk_q^2\quad(47,\ 48,\ \text{Hilfssatz 4}).$$

Hilfssatz 6:

$$\sum_{a=1}^{sk_q}\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}=Bsk_{q+1}\quad\textit{für}\quad sk_q<k_{q+1}\leqq k. \tag{49}$$

Beweis: Für $a<sk_q$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}+\operatorname{ctg}(sk_q-a)\frac{h\pi}{k}&=\sin\frac{sk_qh\pi}{k}\operatorname{cosec}\frac{ah\pi}{k}\operatorname{cosec}(sk_q-a)\frac{h\pi}{k}\\&=B\frac{s}{k_{q+1}}\left(\operatorname{cosec}^2\frac{ah\pi}{k}+\operatorname{cosec}^2(sk_q-a)\frac{h\pi}{k}\right)\\&=B\frac{s}{k_{q+1}}\left(\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-2}+\left\{(sk_q-a)\frac{h}{k}\right\}^{-2}\right).\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{sk_q}\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}&=\operatorname{ctg}\frac{sk_qh\pi}{k}+\frac{1}{2}\sum_{a<sk_q}\left(\operatorname{ctg}\frac{ah\pi}{k}+\operatorname{ctg}(sk_q-a)\frac{h\pi}{k}\right)\\&=Bk_{q+1}+B\frac{s}{k_{q+1}}\sum_{a<sk_q}\left(\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-2}+\left\{(sk_q-a)\frac{h}{k}\right\}^{-2}\right)\qquad(50)\\&=Bk_{q+1}+B\frac{s}{k_{q+1}}\sum_{a<sk_q}\left\{\frac{ah}{k}\right\}^{-2}=Bk_{q+1}+B\frac{s}{k_{q+1}}k_{q+1}^2\qquad(46)\\&=Bsk_{q+1}.\end{aligned}$$

Hilfssatz 7:

$$\sum_{a=1}^{m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = B k b \quad \textit{für} \quad m < k, \; k > c_1. \tag{51}$$

Beweis: Ich lege $q = q(m)$, $s = s(m)$, $m_1 = m_1(m)$ nacheinander fest durch

$$k_q \leqq m < k_{q+1} \leqq k, \quad s k_q \leqq m < (s+1) k_q, \quad m_1 = m - s k_q. \tag{52}$$

$$\sum_{a \leqq m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = \sum_{a \leqq s k_q} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} + \sum_{s k_q < a \leqq m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k}$$

$$= B s k_{q+1} + \sum_{a \leqq m_1} \operatorname{ctg} (s k_q + a) \frac{h \pi}{k} \qquad (49, 52). \tag{53}$$

$$\sum_{a \leqq m_1} \left(\operatorname{ctg} (s k_q + a) \frac{h \pi}{k} - \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} \right) = - \sin \frac{s k_q h \pi}{k} \sum_{a \leqq m_1} \operatorname{cosec} \frac{a h \pi}{k} \operatorname{cosec} (s k_q + a) \frac{h \pi}{k}$$

$$= B \frac{s}{k_{q+1}} \sum_{a \leqq m_1} \left(\operatorname{cosec}^2 \frac{a h \pi}{k} + \operatorname{cosec}^2 (s k_q + a) \frac{h \pi}{k} \right)$$

$$= B \frac{s}{k_{q+1}} \sum_{a \leqq m_1} \left(\left\{ \frac{a h}{k} \right\}^{-2} + \left\{ (s k_q + a) \frac{h}{k} \right\}^{-2} \right)$$

$$= B \frac{s}{k_{q+1}} \sum_{a \leqq m} \left\{ \frac{a h}{k} \right\}^{-2} = B \frac{s}{k_{q+1}} k_{q+1}^2 \qquad (52, 46)$$

$$= B s k_{q+1}. \tag{54}$$

$$\sum_{a \leqq m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = \sum_{a \leqq m_1} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} + B s k_{q+1} \qquad (53, 54). \tag{55}$$

Ist $m_1 > 0$, so bestimme ich $q_1 = q_1(m_1)$, $s_1 = s_1(m_1)$, $m_2 = m_2(m_1)$ nacheinander durch

$$k_{q_1} \leqq m_1 < k_{q_1+1} \leqq k_q, \quad s_1 k_{q_1} \leqq m_1 < (s_1+1) k_{q_1}, \quad m_2 = m_1 - s_1 k_{q_1} \tag{56}$$

und erhalte aus (55), indem ich m, m_1, s, q durch m_1, m_2, s_1, q_1 ersetze,

$$\sum_{a \leqq m_1} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = \sum_{a \leqq m_2} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} + B s_1 k_{q_1+1}. \tag{57}$$

Auf diese Weise fahre ich fort. Da hierbei $q > q_1 > q_2 > \ldots$, so muß ich schließlich zu einem $m_{p+1} = 0$ kommen. Aus (55), (57) und den weiteren analogen Beziehungen ergibt sich dann

$$\sum_{a \leqq m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = B (s k_{q+1} + s_1 k_{q_1+1} + \ldots + s_p k_{q_p+1})$$

$$= B (s k_q a_q + s_1 k_{q_1} a_{q_1} + \ldots + s_p k_{q_p} a_{q_p}). \tag{58}$$

Ferner ist nach (52), (56) usw.

$$m = s k_q + s_1 k_{q_1} + \ldots + s_p k_{q_p}, \quad (59)$$

[10])

$$k = k_n > m \geqq k_q > k_{q_1} > \ldots > k_{q_p}. \quad (60)$$

Ich unterscheide zwei Fälle: 1) $q_p \geqq \nu$ (ν war die kleinste natürliche Zahl mit (3)). Dann folgt aus (58), (59), (60) und (5)

$$\sum_{a \leqq m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = B (s k_q + s_1 k_{q_1} + \ldots + s_p k_{q_p}) b_q = B m b_q = B k b.$$

2) $q_p < \nu$. Dann setze ich

$$\sum_{\varrho=0}^{p} s_\varrho k_{q_\varrho} a_{q_\varrho} = \sum_{\substack{\varrho=0 \\ q_\varrho < \nu}}^{p} + \sum_{\substack{\varrho=0 \\ q_\varrho \geqq \nu}}^{p} = \Sigma_1 + \Sigma_2 \qquad (s_0 = s,\ q_0 = q). \quad (61)$$

Σ_1 enthält höchstens ν, also höchstens c Glieder; jedes zugehörige $s_\varrho k_{q_\varrho}$ ist $\leqq k_{q_\varrho+1} \leqq k_\nu \leqq c$; jedes zugehörige a_{q_ϱ} ist $\leqq b_1 = c$ (4). Also ist

$$\Sigma_1 \leqq c_1. \quad (62)$$

Für Σ_2 ergibt sich, wie vorhin,

$$\Sigma_2 = B k b \quad (63)$$

(dies gilt natürlich auch dann, wenn Σ_2 leer ist). Aus (58), (61), (62) und (63) folgt

$$\left| \sum_{a \leqq m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} \right| \leqq A c_1 + A k b \leqq A k b \quad \text{für} \quad k > c_1.$$

Hilfssatz 8:

$$T_2(x) = B (x^{\frac{3}{2}} + x k b + x^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}) \quad \textit{für} \quad k > c_1. \quad (64)$$

Beweis:

$$\sum_{a \equiv 1 \pmod k}^{k-1} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = \sum_{a=1}^{k-1} \operatorname{ctg} \frac{a \pi}{k} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{k-1} \left(\operatorname{ctg} \frac{a \pi}{k} + \operatorname{ctg} \frac{(k-a)\pi}{k} \right) = 0. \quad (65)$$

$$\sum_{a \leqq \sqrt{n}}{}' \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} = \sum_{a=1}^{m} \operatorname{ctg} \frac{a h \pi}{k} \qquad (m < k) \qquad (65)$$

$$= B k b \quad \text{für} \quad k > c_1 \qquad (51). \quad (66)$$

(64) folgt aus (39) und (66).

---

[10]) Diese Entwicklung von m nach den Nennern der Näherungsbrüche von θ benutzte A. Ostrowski „Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **1** (1922), S. 77—98] zur Untersuchung der Summe

$$\sum_{n \leqq m} \left(R(n\theta) - \frac{1}{2} \right).$$

§ 2.

Hilfssatz 9: *Es sei* $h = h_n,\ k = k_n,\ b = b_n,\ k > c_1$;

$$(67) \qquad S(x) = \sum_{m \leqq x} d(m)\, e\Big(\frac{mh}{k}\Big), \qquad T(x) = \sum_{m \leqq x} S(m).$$

Dann gilt

$$(68) \quad T(x) = \frac{1}{2k} x^2 \log x - \frac{1}{k}\Big(\log k - \gamma + \frac{3}{4}\Big) x^2 + B(x^{\frac{3}{2}} + xkb + x^{\frac{1}{2}} k^2).$$

Beweis: Ergibt sich aus (67), (26), (64) und den folgenden Formeln aus II, bei denen h und k beliebige ganze teilerfremde Zahlen mit $k > 1$ sein dürfen:

$$\text{II}(12) \quad S(x) = -i \sum_{a \leqq \sqrt{x}}{}' \operatorname{ctg} \frac{ah\pi}{k}\, e\Big(\frac{ah}{k}\Big[\frac{x}{a}\Big]\Big) + i \sum_{a \leqq \sqrt{x}}{}' \operatorname{ctg} \frac{ah\pi}{k}\, e\Big(\frac{a^2 h}{k}\Big)$$

$$+ 2 \sum_{\substack{a \leqq \sqrt{x} \\ k \mid a}} \sum_{a \leqq b \leqq \frac{x}{a}} 1 + B\sqrt{x}$$

$$\text{II}(13) \qquad = -i S_1(x) + i S_2(x) + 2 S_3(x) + B\sqrt{x},$$

$$\text{II}(32) \qquad T_1(x) = \sum_{m \leqq x} S_1(m),$$

$$\text{II}(33) \qquad T_1(x) = B(x^{\frac{3}{2}} + xk + x^{\frac{1}{2}} k^2),$$

$$\text{II}(36) \qquad T_3(x) = \sum_{m \leqq x} S_3(m),$$

$$\text{II}(38) \quad 2\, T_3(x) = \frac{1}{2k} x^2 \log x - \frac{1}{k}\Big(\log k - \gamma + \frac{3}{4}\Big) x^2 + B(x^{\frac{3}{2}} + xk).$$

Aus (68) folgt Satz III wörtlich wie Satz II aus der analogen Formel

$$\text{II}(9) \quad T(x) = \frac{1}{2k} x^2 \log x - \frac{1}{k}\Big(\log k - \gamma + \frac{3}{4}\Big) x^2 + B(x^{\frac{3}{2}} + xk \log k + x^{\frac{1}{2}} k^2),$$

die wiederum für alle ganzen h und k mit $(h, k) = 1,\ k > 1$ gilt.

Hilfssatz 10: 1) *Im Falle* I *gilt*

$$(69) \qquad \limsup_{\varrho > 0,\ \varrho \to 0} \sqrt{\varrho}\, \Re f(e^{-\varrho + 2\pi\theta i}) = \infty,$$

$$(70) \qquad \limsup_{\varrho > 0,\ \varrho \to 0} \sqrt{\varrho}\, |\Im f(e^{-\varrho + 2\pi\theta i})| = \infty;$$

2) *es gibt ein* A_1, *so daß im Falle* II *für jedes* θ *mit* $\alpha \geqq A_1$

$$(71) \qquad \limsup_{\varrho > 0,\ \varrho \to 0} \sqrt{\varrho}\, \Re f(e^{-\varrho + 2\pi\theta i}) \geqq \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha} \log \alpha,$$

$$(72) \qquad \limsup_{\varrho > 0,\ \varrho \to 0} \sqrt{\varrho}\, |\Im f(e^{-\varrho + 2\pi\theta i}) \geqq \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha} \log \alpha.$$

Beweis: Aus (16) und (17) folgt für $k > c_1$, wegen $\sigma^{-\frac{1}{2}} = B k^{-1} \sigma^{-1}$,

$$f(z) = \frac{1}{ky}(\gamma - \log y - 2\log k) + B\left(\frac{1}{k\sigma} + kb\right)$$

$$= \frac{\sigma - ti}{k|y|^2}(\gamma - \log|y| - i\,\Im \log y - 2\log k) + B\left(\frac{1}{k\sigma} + kb\right)$$

$$= \frac{\sigma - ti}{k|y|^2}\log\frac{1}{k^2|y|} + B\left(\frac{1}{k\sigma} + kb\right),$$

$$\Re f(z) = \frac{\sigma}{k|y|^2}\log\frac{1}{k^2|y|} + B\left(\frac{1}{k\sigma} + kb\right), \tag{73}$$

$$\Im f(z) = -\frac{t}{k|y|^2}\log\frac{1}{k^2|y|} + B\left(\frac{1}{k\sigma} + kb\right). \tag{74}$$

In (73) und (74) darf ich

$$t = t_n = -2\pi\left(\theta - \frac{h_n}{k_n}\right), \quad \sigma = \sigma_n = |t_n|, \quad y = y_n = \sigma_n + t_n i, \tag{75}$$

$$z = z_n = e^{\frac{2h_n\pi i}{k_n}\, y_n}$$

setzen, da dies nach (16) erlaubt ist. Es folgt dann für $k > c_1$

$$\frac{\Re f(z)}{|\Im f(z)|} \geqq \frac{1}{2k\sigma}\log\frac{1}{k^2\sigma} - A\left(\frac{1}{k\sigma} + kb\right),$$

$$\frac{\sqrt{\sigma}\,\Re f(z)}{\sqrt{\sigma}\,|\Im f(z)|} \geqq \frac{1}{2k\sqrt{\sigma}}\log\frac{1}{k^2\sigma} - A\left(\frac{1}{k\sqrt{\sigma}} + kb\sqrt{\sigma}\right). \tag{76}$$

Ich lasse jetzt n über alle natürlichen Zahlen laufen, für die

$$k = k_n > c_1, \qquad a = a_n = b_n = b$$

ist. In jedem der beiden Fälle I und II gibt es unendlich viele solche n. Für jedes ist nach (75)

$$\frac{\pi}{2k^2 b} \leqq \frac{\pi}{k^2(b+1)} = \frac{\pi}{k^2(a+1)} \leqq \sigma \leqq \frac{2\pi}{k^2 a} = \frac{2\pi}{k^2 b},$$

also nach (76)

$$\frac{\sqrt{\sigma}\,\Re f(z)}{\sqrt{\sigma}\,|\Im f(z)|} \geqq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{b}\log b - A\sqrt{b} \geqq \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\,b\log b \quad \text{für} \quad b \geqq A_1 \geqq 2. \tag{77}$$

Setze ich in (77)

$$\sigma = \sigma_n = \varrho_n = \varrho, \quad \text{also} \quad z = e^{-\varrho + 2\pi\theta i} \qquad (75),$$

so folgt

$$\frac{\sqrt{\varrho}\,\Re f(e^{-\varrho+2\pi\theta i})}{\sqrt{\varrho}\,|\Im f(e^{-\varrho+2\pi\theta i})|} \geqq \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{b}\log b \quad \text{für} \quad b \geqq A_1. \tag{78}$$

Durchläuft n die oben definierten Zahlen, so strebt das positive ϱ gegen Null, während die rechte Seite von (78) im Falle I über alle Grenzen wächst, im Falle II von einer Stelle ab $= \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha}\log\alpha$ ist, da dann $b = a = \alpha$ gilt. Damit sind die Behauptungen (69) bis (72) nachgewiesen.

Es sei dauernd $\varrho > 0$. Aus (7) und (8) folgt

$$f(e^{-\varrho+2\pi\theta i}) = \sum_{m=1}^{\infty} d(m)\, e(m\theta)\, e^{-m\varrho} = (1-e^{-\varrho}) \sum_{m=1}^{\infty} D(m)\, e^{-m\varrho},$$

$$\sqrt{\varrho}\,\Re f(e^{-\varrho+2\pi\theta i}) = \sqrt{\varrho}\,(1 \quad e^{-\varrho}) \sum_{m=1}^{\infty} \Re D(m)\, e^{-m\varrho}, \tag{79}$$

$$\sqrt{\varrho}\,\Im f(e^{-\varrho+2\pi\theta i}) = \sqrt{\varrho}\,(1-e^{-\varrho}) \sum_{m=1}^{\infty} \Im D(m)\, e^{-m\varrho}. \tag{80}$$

Beweis von (12) und (13): Es sei (12) nicht wahr. Dann gilt

$$m^{-\frac{1}{2}}\Re D(m) \leqq c, \qquad \Re D(m) \leqq c\sqrt{m} \qquad (m \geqq 1),$$

also nach (79)

$$\sqrt{\varrho}\,\Re f(e^{-\varrho+2\pi\theta i}) \leqq c\sqrt{\varrho}\,(1-e^{-\varrho}) \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\, e^{-m\varrho} \leqq c,$$

im Gegensatz zu (69).

Genau ebenso folgt (13), mit Hilfe von (80) und (70).

Beweis von (14) und (15): Es sei (14) nicht wahr. Dann gilt für $m > c_2$, $\alpha \geqq A_1 \geqq 2$

$$m^{-\frac{1}{2}}\Re D(m) \leqq 0{,}21\sqrt{\alpha}\log\alpha, \qquad \Re D(m) \leqq 0{,}21\sqrt{\alpha}\log\alpha\cdot\sqrt{m},$$

also nach (79)

$$\begin{aligned}\sqrt{\varrho}\,\Re f(e^{-\varrho+2\pi\theta i}) &\leqq \sqrt{\varrho}\,(1-e^{-\varrho}) \sum_{m \leqq c_2} |D(m)| \\ &\quad + 0{,}21\sqrt{\alpha}\log\alpha\cdot\sqrt{\varrho}\,(1-e^{-\varrho}) \sum_{m>c_2} \sqrt{m}\, e^{-m\varrho} \\ &\leqq c\,\varrho^{\frac{3}{2}} + 0{,}21\sqrt{\alpha}\log\alpha\cdot\varrho^{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\, e^{-m\varrho}. \end{aligned} \tag{81}$$

Strebt ϱ gegen Null, so ist

$$\varrho^{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\, e^{-m\varrho} \sim \varrho^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \sqrt{u}\, e^{-u\varrho}\, du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aus (81) folgt daher

$$\limsup_{\varrho>0,\ \varrho\to 0} \sqrt{\varrho}\,\Re f(e^{-\varrho+2\pi\theta i}) \leqq 0{,}105\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}\log\alpha,$$

und mithin nach (71)

$$\frac{1}{3\sqrt{\pi}} \leqq 0{,}105\sqrt{\pi}, \qquad \pi \geqq \frac{1}{0{,}315} \geqq 3{,}17.$$

Genau ebenso ergibt sich (15), mit Hilfe von (80) und (72).

§ 3.

Hilfssatz 11: *Für fast alle θ ist*

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq c\, x \log^{1+\varepsilon} x. \tag{82}$$

Beweis: Ich darf θ als irrational voraussetzen, da die rationalen Werte nur eine Nullmenge bilden. Für $x < k_2$ ist die Behauptung klar; es sei somit

$$k_r \leqq x < k_{r+1}, \quad r \geqq 2 \ \text{(also } k_r \geqq 2\text{)}. \tag{83}$$

Dann gilt nach H. Behnke[11])

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ k_r + m}} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq A\, x \log x.$$

Ich brauche daher nur zu zeigen, daß unter der Voraussetzung (83) für fast alle irrationalen θ

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ k_r \mid m}} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq c\, x \log^{1+\varepsilon} x \tag{84}$$

ist. Zunächst gilt nach (83)

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ k_r \mid m}} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq \sum_{k_r \leqq m \leqq k_{r+1}} \frac{1}{\{m\theta\}} = \sum_{m \leqq \frac{k_{r+1}}{k_r}} \frac{1}{\{m k_r \theta\}}. \tag{85}$$

Für $m \leqq \frac{k_{r+1}}{k_r}$ ist

$$m\,|k_r\theta - h_r| < \frac{k_{r+1}}{k_r}\,\frac{1}{k_{r+1}} = \frac{1}{k_r} \leqq \frac{1}{2},$$

also

$$\{m k_r \theta\} = \{m\,|k_r\theta - h_r|\} = m\,|k_r\theta - h_r| = m\,\{k_r\theta\}. \tag{86}$$

Aus (85) und (86) folgt

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ k_r \mid m}} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq \{k_r\theta\}^{-1} \sum_{m \leqq \frac{k_{r+1}}{k_r}} \frac{1}{m} \leqq \{k_r\theta\}^{-1} \left(1 + \log \frac{k_{r+1}}{k_r}\right)$$

$$< 2\, k_{r+1} \left(1 + \log \frac{k_{r+1}}{k_r}\right). \tag{87}$$

Für fast alle irrationale θ gilt bekanntlich

$$k_{r+1} \leqq c\, k_r \log^{1+\frac{\varepsilon}{2}} k_r \quad (r \geqq 2). \text{[12])} \tag{88}$$

[11]) Literatur in I, Fußnoten [18]) und [27]); vgl. auch I, Hilfssatz 30.

[12]) Vgl. z. B. I, Hilfssatz 2.

(83), (87) und (88) ergeben

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ k_r \mid m}} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq c\, x \log^{1+\frac{\varepsilon}{2}} x \log\log x$$

$$\leqq c\, x \log^{1+\varepsilon} x. \tag{84}$$

Um (22) bis (25) zu erhalten, braucht man nur (82) an denjenigen Stellen von I anzuwenden, wo ich die schwächere Abschätzung

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\{m\theta\}} \leqq c\, x \log^{2+\varepsilon} x \quad \text{für fast alle irrationale } \theta \tag{I(38)}$$

zum Beweise von (18) bis (21) benutzt habe.

Radość, den 17. Dezember 1931.

(Eingegangen am 24. Dezember 1931.)

Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik

Von

Dr. B. L. van der Waerden
o. Professor an der Universität Leipzig

Mit 7 Abbildungen. VIII, 157 Seiten. 1932. RM 9.—; gebunden RM 9.90

„Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen"
Band XXXVI

Inhaltsübersicht:

I. Quantenmechanische Einleitung.
Die Schroedingersche Differentialgleichung. — Lineare Operatoren. Orthogonalsysteme. — Die Wellengleichung eines Atoms und die eines Moleküls. — Elektron im zentralsymmetrischen Feld. — Störungsrechnung. — Impulsmoment und infinitesimale Drehungen.

II. Gruppen und ihre Darstellungen.
Lineare Transformationen. — Gruppen. — Äquivalenz und Reduzibilität von Darstellungen. — Darstellung Abelscher Gruppen. Beispiele. — Die Eindeutigkeitssätze. — Die Kroneckersche Produkttransformation. — Die mit einer Darstellung vertauschbaren Matrices. — Darstellungen einer endlichen Gruppe. — Die Charaktere.

III. Drehungsgruppe und Lorentzgruppe.
Die lineare Gruppe $\mathfrak{c}_2$, die unitäre Gruppe $\mathfrak{u}_2$ und ihre Beziehung zur Drehungsgruppe $\mathfrak{d}_3$. — Die infinitesimalen Transformationen und die Darstellungen der Drehungsgruppe. — Beispiele und Anwendungen: 1. Ausreduktion der Produktdarstellung $\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}_{i'}$ der Drehungsgruppe. — 2. Anwendungen dieser Relation. — 3. Der Spiegelungscharakter. — Auswahl und Intensitätsregeln. — Die Darstellungen der Lorentzgruppe: 1. Die Gruppe $\mathfrak{c}_2$ und die eigentlichen Lorentztransformationen. — 2. Die Spiegelung s und die volle Lorentzgruppe. — 3. Spinoranalyse. — 4. Die infinitesimalen Transformationen.

IV. Das Spinning Elektron.
Der Spin. — Die Wellenfunktion des Spinning Elektron. — Die Lorentzinvariante Wellengleichung von Dirac. — Das Elektron im Zentralfeld nach Dirac. — Mehrelektronenproblem. Multiplettstruktur. Zeemaneffekt: Der anomale Zeemaneffekt.

V. Die Permutationsgruppe und das Pauliverbot.
Die Resonanz gleicher Individuen. — Das Pauliverbot und das periodische System der Elemente. — Die Eigenfunktionen des Atoms nach dem Pauliverbot. — Die approximative Berechnung der Energie. — Die reinen Spinfunktionen und ihre Transformation bei Drehungen und Permutationen.

VI. Molekülspektren.
Die Quantenzahlen des Moleküls. — Die Rotationsniveaus. — Berücksichtigung des Spin. — Moleküle mit zwei gleichen Kernen. — Die Entstehung des Moleküls aus zwei Atomen. — Bemerkungen über die Abschätzung der Energie.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Bliss, G. A., Variationsrechnung. Deutsche Ausgabe, herausgegeben von F. Schwank. 1 Bd. 8° geb. VIII u. 127 S. Mit 47 Figuren. Leipzig, Berlin 1932, B. G. Teubner.

Ostrowski, A., Studien über den Schottkyschen Satz. 1 Bd. 4° brosch. IV u. 112 S. Basel 1931, B. Wepf u. Cie.

Degenhart-Fick-Sellien, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen. Algebra, Oberstufe. Nach Entwurf von Ostdr. Albert Rohrberg. 1 Bd. 8°. Geb. VI u. 200 S. München und Berlin 1931, R. Oldenbourg.

Mathematica, Volumul III (1930). Primul congres al matematicienilor Români, Cluj, 9—12 Mai 1929. Cluj, 1930. Ardealul.

Planck, M., Positivismus und reale Außenwelt. Vortrag, gehalten am 12. November 1930 im Harnack-Haus der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften. 1 Bd. Kl.-8°. brosch, 35 S. Leipzig, 1931, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

Schilling, F., Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie. 1 Bd. 8°. geb. IV u. 69 S. Mit 63 Figuren im Text und einer Bildnistafel. Leipzig, Berlin 1931, B. G. Teubner.

Mie, G., Naturwissenschaft und Theologie. 1 Bd. Kl.-8°. brosch. 39 S. Leipzig 1932, Akademische Verlagsgesellschaft.

Levi-Civita, T., Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. Lezioni racolte dal Dott. G. Lampariello. 1 Bd. 8°. brosch. VII u. 108 S. Bologna 1931, N. Zanichelli.

Rocard, Y., L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz. Avec une préface de M. Henri Villat. 1 Bd. 8°. brosch. X u. 160 S. Paris, 1932. Gauthier-Villars et Cie.

Rendiconti del seminario matematico della R. università di Padova. Anno II. — N. 2—3—4. (Aprile-Dicembre 1931. — X°). Padova 1931.

Engel, F., Die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Vorlesungen. Bearbeitet von K. Faber. 1 Bd. 8°. geb. XI u. 367 S. Leipzig, Berlin 1932, B. G. Teubner.

Seminario matematico della facoltà di scienze della R. Università di Roma. Serie II, Vol. VII. Rendiconti delle sedute degli anni accademici 1929—30 e 1930—31. Parte I. — Conferenze. 1 Bd. 8°. brosch. 114 S. Roma 1931, G. Bardi.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.
Printed in Germany.